ポアンカレ計量とルジャンドル関数について

加　藤　政壽美

On the Poincarè metric and the Legendre functions

Masasumi Kato

Abstract

In §1 and 2 of this note, we shall offer, to the classical Legendre functions, a new and simple approach, which is entirely different with the traditional one, such as power series expansions, the generating functions, and even with the Rodrigues' formula or the Schläfli's integrals (e.g. [1], [2]).

In §3, we shall recognize that our approach has been closely concerned with the Poincarè metric of the non - euclidean geometry.

§1　νを任意に固定した複素数とし，複素 $z=x+iy$ 平面の単位円内部 $D:|z|<1$ で

$$M_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}+z|^2}\right)^{-\nu}d\theta \tag{1}$$

と置く。ここで被積分関数は複素指数

$$exp\left(-\nu\log\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}+z|^2}\right)$$

を意味し，log は実数をとるものとする。

このとき，$M_\nu(z)$はDで1価，かつ2つの実変数x，yに関して解析的で偏微分が積分記号内で可能だから，

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}+z|^2}=\varphi(z;\theta)$$

と置くと，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)M_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\nu(\nu+1)\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{id}+z|^2}\right)^{-\nu-2}(\mathrm{grad}_z\varphi(z;\theta))^2d\theta$$
$$-\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}+z|^2}\right)^{-\nu-1}\Delta_z\varphi(z;\theta)d\theta$$

になる。ただし，ここでgrad_z，Δ_zはそれぞれθを固定したときの$\varphi(z;\theta)$ のx，yに関する

gradient と Laplacian を表すものとする。

ところが

$$Re\left(\frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}+z}\right)=\varphi(z;\theta)$$

だから

$$\Delta_z\varphi(z;\theta)=0 \text{ かつ } (\mathrm{grad}_z\varphi(z;\theta))^2=\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}+z}\right)\right|^2=\frac{4}{|e^{i\theta}+z|^4}$$

$$\therefore\quad \Delta_z M_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\nu(\nu+1)\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}+z|^2}\right)^{-\nu}\frac{4}{(1-|z|^2)^2}d\theta.$$

したがって Laplacian Δ_z そのものでなく，新らしく微分演算子

$$\Delta^*=(1-|z|^2)^2\Delta_z \tag{2}$$

を導入すると

$$\Delta^* M_\nu(z)=4\nu(\nu+1)M_\nu(z)\quad \text{in } D \tag{3}$$

すなわち(3)は $M_\nu(z)$ が演算子 Δ^* の固有値 $4\nu(\nu+1)$ に対応する固有関数であることを意味する。

ところが $M_\nu(z)$ は，(1)から見られるように，$z=0$ のまわりの回転に対して不変だから $|z|=r$ のみの関数になり，(3)は

$$(1-r^2)^2\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)M_\nu=4\nu(\nu+1)M_\nu\quad(0<r<1) \tag{4}$$

とも書ける。

一方，r の区間（０，１）は写像

$$\mu=\frac{1+r^2}{1-r^2}$$

によって μ の区間（１，∞）へ解析的かつ位相的に写されるから，
$M_\nu(z)$ を更に新変数 μ の関数とみて $P_\nu(\mu)$ と置くと，実数区間（１，∞）で μ に関して解析的な $P_\nu(\mu)$ がその区間で複素次数 ν の Legendre の微分方程式

$$\frac{d}{d\mu}\left((\mu^2-1)\frac{d}{d\mu}\right)P_\nu=\nu(\nu+1)P_\nu \tag{*}$$

をみたすことが示される。

実際，μ に関する微分を「$'$」,「$''$」などで表すと

$$P_\nu'=\frac{dM_\nu}{dr}\cdot r',\quad P_\nu''=\frac{d^2M_\nu}{dr^2}(r')^2+\frac{dM_\nu}{dr}\cdot r''$$

ところが

$$\mu^2-1=\frac{4r^2}{(1-r^2)^2},\quad r'=\frac{1}{4r}(1-r^2)^2,\quad r''=-\frac{1}{4r^2}(1-r^2)(1+3r^2)r'$$

より

$$(\mu^2-1)P_\nu''+2\mu P_\nu'=\frac{1}{4}(1-r^2)^2\Delta_z M_\nu=\nu(\nu+1)P_\nu$$

が得られるからである。

更に，$M_\nu(z)$ は D で x，y に関して解析的かつ $z=0$ で値 1 をとるから，$P_\nu(\mu)$ は $\mu=1$ まで連続に延長され $P_\nu(1)=1$ である。

（注意）微分方程式(✱)は 2 階線型だから，P_ν とは独立なもう 1 つの解（いわゆる第 2 種 Legendre 関数）をもつが，その議論は微分方程式 proper の分野に入るだろう。

§2　§1の(1)に戻って

$$M_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}+z|^2}\right)^{-\nu}d\theta$$

$$=\frac{(1-|z|^2)^{-\nu}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+|z|^2+2|z|\cos\theta)^\nu d\theta$$

を先に導入した変数 $\mu=(1+|z|^2)/(1-|z|^2)$ で書直すと

$$1-|z|^2=\frac{2}{\mu+1},\quad 1+|z|^2=\frac{2\mu}{\mu+1},\quad |z|=\frac{\sqrt{\mu^2-1}}{\mu+1}\tag{1}$$

だから

$$P_\nu(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\theta)^\nu d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\theta)^\nu d\theta\tag{2}$$

一方，§1(1)式の ν を $-(\nu+1)$ で置換えても§1の結果がそのまま成り立つから D で $M_\nu(z)$ と $M_{-(\nu+1)}(z)$ とは一致する。(実際，それを見るには M_ν，$M_{-(\nu+1)}$ とも§1の(4)式をみたし，したがって additive const. しか違わないから)。ゆえにまた

$$P_\nu(\mu)=P_{-(\nu+1)}(\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\mu+\sqrt{\mu^2-1}\cos\theta)^{-(\nu+1)}d\theta\tag{3}$$

を得る。

(2), (3)は，これまでの議論から，任意の複素次数 ν と μ の区間（1，∞）で有効な $P_\nu(\mu)$ の表示であり，これがいわゆる Laplace の第 1，第 2 積分表示であった。

次に，われわれの $P_\nu(\mu)$ の導入法で特に興味があるのは，次数 ν が負でない整数の場合で

ある。

まず $|z|=a \quad (0<a<1)$ と置き，$M_\nu(z)$の回転不変から

$$M_\nu(z)=M_\nu(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-a^2}{|e^{i\theta}+a|^2}\right)^{-\nu}d\theta$$

$$=\frac{(1-a^2)^{-\nu}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+a^2+2a\cos\theta)^\nu d\theta$$

ここで右辺の積分を複素 ζ 平面での積分に直すと

$$M_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)^\nu\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\right)^\nu\frac{d\zeta}{i\zeta}$$

$$=\frac{1}{(1-a^2)^\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}((\zeta+a)(a\zeta+1))^\nu\frac{d\zeta}{\zeta^{\nu+1}}$$

したがってコーシーの積分公式とライプニッツの公式より

$$M_\nu(z)=\frac{1}{(1-a^2)^\nu}\cdot\frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}((\zeta+a)(a\zeta+1))^\nu\right)_{\zeta=0}$$

$$=(1-a^2)^{-\nu}\frac{1}{\nu!}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left(\frac{\nu!}{k!}(\zeta+a)^k\right)_{\zeta=0}\cdot\left(a^k\frac{\nu!}{(\nu-k)!}(a\zeta+1)^{\nu-k}\right)_{\zeta=0}$$

$$=(1-a^2)^{-\nu}\frac{1}{\nu!}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{\nu!}{k!}\cdot\frac{\nu!}{(\nu-k)!}a^{2k}$$

ところが μ と $|z|$（したがって a）との関係(1)を考慮すると

$$P_\nu(\mu)=\frac{1}{2^\nu\nu!}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{\nu!}{k!}\frac{\nu!}{(\nu-k)!}(\mu+1)^{\nu-k}(\mu-1)^k \tag{4}$$

したがって $P_\nu(\mu)$ は μ に関して有理係数かつ最高次の項が

$$\frac{1}{2^\nu}\left(\sum_0^\nu\binom{\nu}{k}^2\right)\mu^\nu=\frac{1}{2^\nu}\binom{2\nu}{\nu}\mu^\nu$$

の ν 次の多項式であり，(4)の右辺によって複素 μ 平面全体へ解析延長されるから，恒等的に

$$P_\nu(\mu)=\frac{1}{2^\nu\nu!}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left(\frac{d^k}{d\mu^k}(\mu+1)^\nu\right)\left(\frac{d^{\nu-k}}{d\mu^{\nu-k}}(\mu-1)^\nu\right)$$

$$=\frac{1}{2^\nu\nu!}\frac{d^\nu}{d\mu^\nu}((\mu^2-1)^\nu)$$

を得る。

これが Legendre 多項式に対する著名な Rodrigues の公式であった。

§3　一般に $n(\geqq 2)$ 個の実変数 u_1，…，u_n に関する，必ずしもユークリッド的でない線素，すなわち正定値2次微分形式

$$ds^2=\sum_{i \cdot j=1}^{u} g_{ij}du_i du_j$$

（ここで係数 g_{ij} は（u）一空間のある領域 $\mathcal{D}$ で class C^1 とし，$\det(g_{ij})=g(>0)$，逆行列 $(g_{ij})^{-1}=(g^{ij})$ と置く）
が与えられたとき，変数 u_1，…，u_n の幾何学的特性に関係なく $\mathcal{D}$ での微分演算子

$$\varDelta_2=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{u}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{g}\sum_{k=1}^{u}g^{ik}\frac{\partial}{\partial u_k}\right)$$

を単に計量 ds^2 に対応する Laplacian ということにする。

この名称の妥当なことは，特に ds^2 がユークリッド線素，すなわち（u_1，…，u_n）がユークリッド（x_1，…，x_n）空間のある領域での十分滑らかな曲線座標の場合，Laplacian $\varDelta_x=\sum_i\frac{\partial^2}{\partial x_i{}^2}$ を（u_1，…，u_n）で表したものが $\varDelta_2$ に他ならぬことを示し得るからである。

そこで今から§1に戻って，$z=x+iy$ 平面の単位円内部 $D:|z|<1$ での線素として

$$ds^2=\frac{1}{(1-|z|^2)^2}(dx^2+dy^2) \tag{1}$$

をとろう。この計量（いわゆる Poincarè 計量）は，関数論でよく知られているように，ユークリッド的でなく D にボリアイ—ロバチェフスキの幾何学（いわゆる非ユークリッド幾何学）を実現するものだが，この計量に対応する Laplacian $\varDelta_2$ は

$$\varDelta_2=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}$$

で，今は $g_{11}=g_{22}=(1-|z|^2)^{-2}$ だから，§1に導入した微分演算子 $\varDelta^*$ に他ならない。

一方，線素(1)を $z=0$ を極とする測地座標 $(\rho,\ \theta)$，すなわち $z=0$ と点 $z\varepsilon D$ との間の非ユークリッド距離の2倍にあたる

$$\rho=\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

と z の偏角 θ　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とで表すために

$$e^\rho=\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

の両辺の微分（differential)をとって

$$e^\rho d\rho=\frac{2}{(1-|z|)^2}d|z| \qquad \therefore\quad d\rho=\frac{2}{1-|z|^2}d|z|$$

一方，

$$ds^2=\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}=\frac{1}{(1-|z|^2)^2}((d|z|)^2+|z|^2d\theta^2)$$

$$=\frac{1}{4}d\rho^2+\left(\frac{|z|}{1-|z|^2}\right)^2d\theta^2$$

そこで一般に実変数 x の双曲線関数である $\sinh x$，$\cosh x$ をそれぞれ $\mathrm{Sin}\,x$，$\mathrm{Cos}\,x$ と略記すると

$$ds^2=\frac{1}{4}(d\rho^2+\mathrm{Sin}^2\rho d\theta^2) \tag{2}$$

だから，測地座標（ρ，θ）に関する微分形式に対応する Δ^2 は

$$\Delta_2=\frac{4}{\mathrm{Sin}\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\mathrm{Sin}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\mathrm{Sin}\rho}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\qquad(0<\rho<\infty)$$

になる。

そこで特にこの微分演算子を，D から $z=0$ を除いた領域で C^2 かつ $z=0$ のまわりの回転で不変な関係 $u(z)$ に適用すると，$\partial^2/\partial\theta^2$ の項が消え，しかも $u(z)$ は $|z|=r$，したがって ρ，更には

$$\mathrm{Cos}\rho=\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}$$

（これは§１で導入した変数 μ に他ならない）
のみに関係するから，ひとまず $u(z)=U(\rho)$ と置くと

$$\frac{dU}{d\mu}=\frac{dU}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\mu}=\frac{1}{\mathrm{Sin}\rho}\cdot\frac{dU}{d\rho}$$

$$\therefore\quad \mathrm{Sin}\rho\frac{dU}{d\rho}=\mathrm{Sin}^2\rho\frac{dU}{d\mu}=(\mu^2-1)\frac{dU}{d\mu}$$

$$\therefore\quad \frac{d}{d\rho}\left((\mu^2-1)\frac{dU}{d\mu}\right)=\mathrm{Sin}\rho\frac{d}{d\mu}\left((\mu^2-1)\frac{dU}{d\mu}\right)$$

$$\therefore\quad \Delta_2U(\rho)=4\frac{d}{d\mu}\left((\mu^2-1)\frac{dU}{d\mu}\right) \tag{3}$$

ゆえに§１の $M_\nu(z)$ と微分演算子 Δ^*，及びこれに等しかった Δ_2 のこの§での表現(3)から

$$\Delta^*M_\nu(z)=\Delta_2M_\nu(z)=4\nu(\nu+1)M_\nu(z)$$

$$\therefore\quad \frac{d}{d\mu}\left((\mu^2-1)\frac{d}{d\mu}\right)P_\nu(\mu)=\frac{1}{4}\Delta_2P_\nu(\mu)=\nu(\nu+1)P_\nu(\mu).$$

以上で D での Poincarè 計量と新変数 μ 及び微分式

$$L=\frac{d}{d\mu}\left((\mu^2-1)\frac{d}{d\mu}\right)$$

との関係が示されたことになる。

以上の議論から次の結びはほとんど明らかであろう。

結び D を複素 $z=x+iy$ 平面の単位円内部，ds^2 を D での Poincarè 計量とする。このとき微分式 L は，ds^2 に対応する D での微分演算子を $z=0$ のまわりの回転不変な関数に作用させる際に生じ，この L と任意の複素定数 ν に対し，微分方程式（§1（$*$））は実数区間 $I=(1,\infty)$ で解析的かつ $\mu=1$ での正規化条件をみたすただ1つの解 $P_\nu(\mu)$ をもつ。

特に ν が負でない整数なら，上記 $P_\nu(\mu)$ は I から複素 μ 平面全体の ν 次の多項式に解析延長され，Rodrigues の表示が得られる。

Reference

[1] R. Courant und D. Hilbert. Methoden der Mathematischen Physik. Bd. I. Berlin (1930) pp.70～73, pp.433～436.

[2] E. T. Whittaker and G. N, Watson. A Course of Modern Analysis. (4th ed.) Cambridge (1978) pp.302～314.