ファジー時系列解析の新手法とその理論的諸条件

勝　木　太　一

概　要

本稿の目的はファジーシステムを時系列解析に適用するための理論的条件の解明と新しいファジー解析システムの開発である。まず、確率過程をファジー測度にどのように対応させられるものであるか、さらに確率的時系列解析モデルの定常性問題を、ファジーシステムではどのように考えるべきであるかを明確にする必要がある。

その上で、確率的時系列解析モデルの主なモデルの形式がファジーシステムにおいても妥当するものであるかを解明していかなければならない。その結果、ファジーシステムにおける特有の性質が明らかにされ、それを定理として取り上げることにした。

1. はじめに

すでに「ファジー回帰システム」が開発され、以来多くの研究に活用されていることは周知のところである。しかし、これをそのまま「時系列解析」に適用することは、これまでの「ファジー回帰システム」自体に発散的傾向が内含されるという点において多くの問題の有するところであった。

本論は、その点を鑑み、「時系列解析」のための「ファジー回帰システム」の開発・提案と、その理論的考察を進めるものである。

2. 定常性の仮定

まず、認識しておかなければならないことは、確率的時系列解析モデルにおいて１つの大きな前提があるということである。いわゆる、モデルシステムの確率過程が定常的であること―すなわち、時間を通じて一定であるという性質を有していると仮定されるということである。

もし、この仮定が満たされない場合、モデルシステムは、当該期間を通じて安定したも

のであるとはいえなくなるのである。

たとえば、以下のような自己回帰モデルを推定したとしよう。

$$Y_t = aY_{t-1}$$

このモデルの確率パラメーターはｔ期とｔ－１期との間の確率過程を示している。当然、当該期間を通じて、このモデルが適用されるためには、確率誤差はあるにせよY_tはY_{t-1}のａ倍であるという関係が妥当していなくてはならない。このことをもう少し統計理論的に述べるならば、以下のようになる。

もし、データの系列（Y_t）が定常的であるならば、その平均も定常的である。すなわち、

$$\mu = E[Y_t]$$

とすると、

$$E[Y_t] = E[Y_{t+i}]$$

となるはずである。

したがって、このことからその分散

$$\sigma^2 = E[(Y_t - \mu)^2]$$

についても

$$E[(Y_t - \mu)^2] = E[(Y_{t+i} - \mu)^2]$$

が成り立つ。これより、データ系列の共分散

$$E[(Y_t - \mu)(Y_{t+i} - \mu)]$$

も定常的であることがいえることになる。

このことは、系列の各データがそれぞれ一定の相関にあるということを示すものである。

このような定常性の仮定が時系列解析モデルにおいて重要な意味を有するのは、実は、以下のような仮説にあるということができるであろう。

経済モデルに関していえば、計量経済モデルと違って、時系列解析モデルは、経済構造を一種のブラックボックスとしてとらえるものであり、経済システムの特性を経済変数の時間的経緯の中で把握しようとするものである。＊1

＊１　刈屋武昭『計量経済分析の基礎と応用』東洋経済新報社，p.178参照。

このようなモデルでは、経済現象はモデルの特性の中に（確率的に）把握されるものであり、データの持つ情報を如何に的確にシステム化するかということが重要な課題となる。いわば、入力されたデータがシステムを介して出力されるとき、その出力データがどのようなものであるかということからシステムの特性をとらえようとするものであったり、また、そのシステムの状態自体（すなわち状態空間）を推定することによってモデルの精度を高めるというものである。

この点から、変数が時間の変化によって著しくランダムに変動するということは一定の（経済）システムを前提するということから回避されなければならないのである。すなわち、定常性が前提されなければならないということになる。

また、このような時系列解析モデルは、理論モデルを現実に適用して分析を進める計量経済モデルに対して、過去のプロセスにもとづき、現在の、また将来の値を一定の（経済）システムを前提にして推測しようという点で、帰納的色彩の濃いシステムということができるであろう。

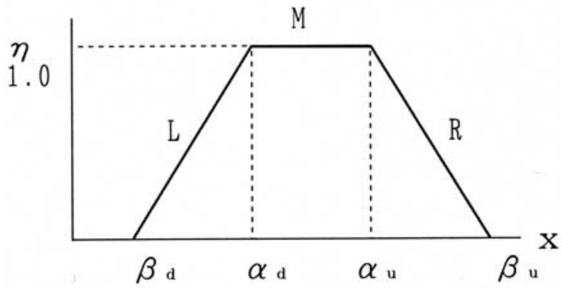
3. ファジー測度　ー可能性と必然性ー

さて、ファジー時系列解析でも、やはり、上記の定常性の問題は欠くことのできない条件であることに相違はない。このことを明確にするために、まず「ファジー測度」について論じることにしよう。

ファジー推定システムにおける最も重要な特徴の１つはファジーエリアの特定である。このファジーエリアはファジー数の集合ということができるが、これは、「メンバーシップ関数」によって以下のように定義することができる。

いま、xがあるファジー集合に属する「度合」をηとすると、一般に、この「メンバーシップ関数」は、「１図」のような形状を示すものとされる。

「１図」



この関係は、

$$\eta_M(x)=\begin{cases} L\left((\alpha_d - x)/d\right) & ; x \leqq \alpha_d \\ 1 & ; \alpha_d \leqq x \leqq \alpha_u \\ R\left((x-\alpha_u)/u\right) & ; x \geqq \alpha_u \end{cases} \qquad -(1)$$

※Lは１図の左側の、Rは右側の関数である。
α_d，α_uが位置を示すパラメータであるのに対し、
d，uはβ_dからα_d　またα_uからβ_uの範囲の
パラメータである。

のように定義されるものである。

ファジーエリアとは、このｘのβ_dからβ_uの範囲をいうのである。いうまでもなく、このようなメンバーシップ関数はｘの値の可能性分布であると考えられるもので、これはある１つのデータ数のファジーエリアであり、そのデータの取り得る値の範囲ということができる。

もし、ここで

$$Y=f(X)$$

というような関数をファジーモデル化した場合、従属変数Ｙ自体のファジーエリアと独立変数Ｘのファジーエリアが（関数関係のもとに）複合化されなければならない。

すなわち、ファジーエリアの推定は、以下の原理に従うということができるであろう。

$$g(\phi)=0$$
$$g(x)=1$$

※ϕ＝空集合、ｘ＝全体集合

のもとに、事象Ａ，Ｂにおいて

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leqq g(B)$$

を満たすｇを「ファジー測度」というが、これより、

$$g(A \cup B) \geqq \max\{g(A),\ g(B)\} \qquad -(2)$$
$$g(A \cap B) \leqq \min\{g(A),\ g(B)\} \qquad -(3)$$

と表現することができる。

この（２）式の下限であるファジー測度ｇをＨとすると、

$$H(A \cup B) = \max\{H(A), H(B)\} = H(A) \vee H(B) \qquad -(4)$$

となる。これを「可能性測度」と呼ぶ。

また、同様に、（３）式における上限ファジー測度ｇをNとすると、

$$N(A \cap B) = \min\{N(A), N(B)\} = N(A) \wedge N(B) \qquad -(5)$$

を得る。これが「必然性測度」と呼ばれるものである。

なお、この２つのファジー測度は、以下のような関係にまとめることができる。

Ａの補集合をA^cとしたとき、（４）式から、

$$H(A \cup A^c) = H(A) \vee H(A^c) = 1 \qquad -(6)$$

となり、また（５）式から、

$$N(A \cap A^c) = N(A) \wedge N(A^c) = 0 \qquad -(7)$$

を得る。

この（４）（５）両式の双対性から、

$$H(A) = 1 - N(A^c) \qquad -(8)$$

また、

$$N(A) = 1 - H(A^c) \qquad -(9)$$

が得られる。よってｘが離散集合であり、ｘ上の可能性分布を$\pi(x)$とすると、

$$H(A) = \sup_{x \in A}(\pi(x)) \qquad -(10)$$

であり、これより、

$$N(A) = \inf_{x \in A}(1 - \pi(x)) \qquad -(11)$$

という表記ができることになる。すなわち、「可能性測度」から「必然性測度」が定義できるのである。

なお、ここで、

$$H(A) \geqq N(A)$$

であり、

$$N(A) > 0 \Rightarrow H(A) = 1$$
$$H(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0$$

ということに注意すべきである。

このような「可能性分布」は、確率空間における確率分布に対応した意味をファジー（可能性）空間に有するものであり、ファジーエリアを特定する要素となるのである。すなわち、可能性分布に基づくファジー空間をモデル化することによって、ファジーエリアの特定、ひいては推定が行われることになる。

なお、

$$y = f(x, z) \quad -(12)$$

という関数が特定されるような場合、この関数上でｘ，ｚの「可能性分布」が与えられたとき、ｙの可能性分布は

$$\pi_Y(y) = \sup_j \pi(y_1, y_2, \cdots\cdots y_n) \quad -(13)$$

$$\pi_X(y) = \sup_j \pi(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) \quad -(14)$$

$$\pi_Z(y) = \sup_j \pi(z_1, z_2, \cdots\cdots z_n) \quad -(15)$$

で定義されるものとなる。したがって、このとき、$y = f(x, z)$ という関数関係が規定できるかぎり、

$$\pi_Z(y) = \sup_j \{\pi(y_1, y_2, \cdots\cdots y_n) \wedge \pi(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) \wedge \pi(z_1, z_2, \cdots\cdots z_n)\} \quad -(16)$$

となるということができるのである。

4. 可能性線形システム

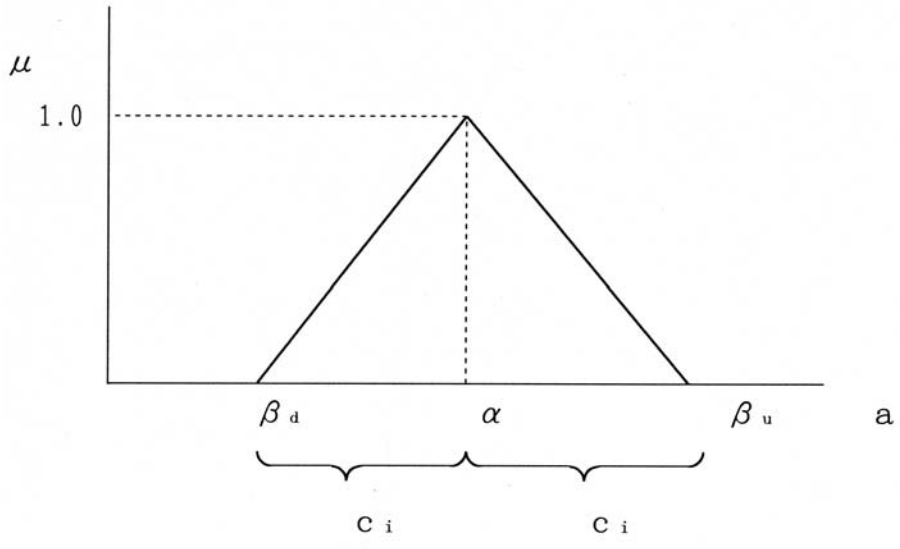
上記の「可能性分布」を示すファジー数に基づき、多変量データの関数としてモデル化を検討するために、もっとも単純なモデルである線形システムを考えることにしよう。

これを、

$$Y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots\cdots + A_n x_n \qquad -\ (17)$$

のように表すことにする。この線形システムのファジー数の「可能性分布」を、「確率モデル」で前提されている「正規分布」にみられるような左右対称形を仮定し、以下のような「ピラミッド型」のメンバシップ関数にしたがうものとしよう。

「第２図」



このような可能性分布を示す「ファジー数」を定義する場合、ファジーモデルを如何にとらえているかでかなり違ったものとすることができる。

例えば、これまでの「ファジー線形回帰システム」では、（17）式のパラメータについて、c_iをファジーエリアを示す変数として、

$$A_i = (\alpha_i,\ c_i) \qquad -\ (18)$$

と考えている。この場合、メンバーシップ関数（１）式は左右対称な形をとるとして、以下のように改められる。

$$\mu_{A_i}(a_i) = L\left((a_i - \alpha_i) / c_i\right) \qquad -\ (19)$$

したがって、（17）式の関数は、

$$Y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots\cdots + A_n x_n \qquad -(19)$$

$$= (\alpha_1,\ c_1)\ x_1 + (\alpha_2,\ c_2)\ x_2 + \cdots + (\alpha_n,\ c_n)\ x_n \qquad -(20)$$

となる。

一方、このようなシステムに対して、以下のような回帰システムを提案することにしよう。

上記の「ファジー線形回帰システム」に対し、（18）式を

$$A_i x_i = \alpha_i x_i + c_i \qquad -(21)$$

のようなものと考えるケースである。

このとき、（19）式は

$$\mu_{A_i x_i}(z_i) = L\left((a_i - \alpha_i)\ x_i / c_i \right) \qquad -(22)$$

のように改められ、「第３図」のようにメンバーシップ関数の形状を示すことができる。

したがって、

$$Y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots\cdots + A_n x_n$$

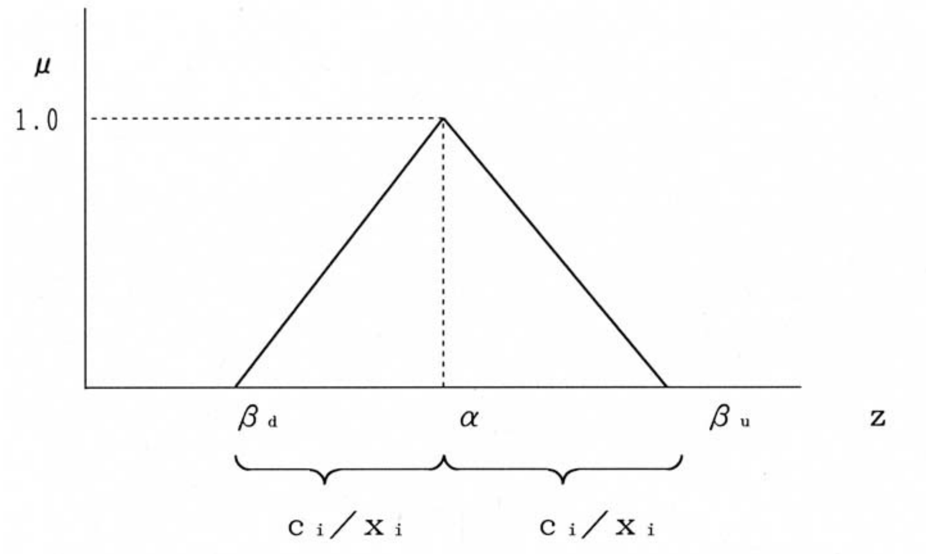
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \qquad -(23)$$

というファジー関数が得られることになる。

この（23）式の「関数」はパラメータが（21）式のようなファジー数であることから、そのファジーエリアが独立変数（x_i）の大きさに左右されないものとなっている。このような特徴によって、ここに提案する回帰システムは、データ系列に定常性が満たされている場合、その特徴を損なうことなく「モデル化」することができるものとなっているということができるのである。 ＊2

＊２　この回帰システムは、筆者が「ファジー時系列解析モデルの新手法の開発と適用－その１；ファジー自己回帰モデルの新手法の理論的考察－」『松阪大学紀要』第15号，1997年において開発したものである。

「第３図」



5. ファジー定常性

これまで述べてきたことによって、ファジー回帰分析における重要な問題点である「線形モデル」における「ファジーエリア」の特定（推定）について、理論的に説明することが、ある程度はできたはずである。

なお、本論の目的とするところは、「ファジーシステム」による時系列解析モデルを開発することである。したがって、これに欠くことのできない「ファジー定常性」の問題について明確にしておかなければならない。

前述したように、変数が時間の変化によって著しくランダムに変動するということは一定の（経済）システムを前提する場合には回避されなければならない。このことが、変数データ系列の「定常性」を前提する必要性を求める大きな理由となっているわけである。

さて、このような「定常性」については、「確率モデル」におけるそれと、「ファジーモデル」のものをまったく同じものと考えても良いのであろうか。

なお、この点を論じるにさいして「ファジーモデル」における「データ」の特徴を考えなければならない。先に述べた「ファジー可能性線形システム」は、端的にいえば「可能性分布」をフォローした一種の「区間解析システム」である。いうまでもなく、この区間が「ファジーエリア」であるが、上記の意味での「定常性」を前提する場合、「ファジーエリア」が「当該期間」を通じて「一定」のものであることが重要となってくる。

確率モデルにおいて以下の３つの条件

$$E(z_t) = \mu \qquad -(24)$$

$$E\{(z_t - \mu)^2\} = \sigma^2 \qquad -(25)$$

$$E\{(z_t - \mu)(z_s - \mu)\} / \sigma^2 = \rho_{t-s} \qquad -(26)$$

※E_{zt}：zの期待値

μ：zの平均値

ρ_{t-s}：z_tとz_sの自己相関

を満たす場合、「定常性」が得られているとされる。

これとほぼ同様の考え方にもとづいた場合、ファジーモデルにおける「定常性」は

時系列過程のファジーエリアは一定である。

時系列過程の平均は一定である。

を満たすものと定義することができるであろう。

これによって一次の「自己回帰モデル」について、以下のように示すことができる。

ファジーエリアをFとした場合

$$y_t = a\, y_{t-1} + |F_t| \qquad -(27)$$

とモデルを表記することができるが、これより、上記の「定常性」の仮定を満たすならば、

$$\Phi = \Sigma |F_t| / n$$

および、

$$|F_1| = |F_2| = \cdots = |F_n|$$

となり、(27) 式は

$$\mu = a\,\mu + \Phi \qquad -(28)$$

となる。これより、

$$\Phi = (1 - a)\,\mu \qquad -(29)$$

が得られ、

$$\Phi > 0$$

であるためには

$$a < 1$$

とならなければならないことを示す。これより、

$$\mu = \frac{\Phi}{1 - a} \quad -(30)$$

が得られるが、これはファジーエリアの大きさとパラメータおよび平均値の大きさの関係を規定するものとなる。

この規定は、第n次の自己回帰モデルに拡張した場合、

$$\Phi = (1 - \Sigma a_i)\ \mu \quad -(31)$$

$$\mu = \frac{\Phi}{1 - \Sigma a_i} \quad -(30)'$$

と表すことができる。

なお、この場合、

$$\Sigma a_i < 1 \quad -(32)$$

であることが求められることは言うまでもない。

したがって、(30)(30)’ないし(31)式と(32)式を満たしている限り、第n次のファジー自己回帰モデルは、「定常性」の条件を満たしていると言うことができるのである。

6. ファジー時系列解析モデル

さて、上述のように、自己回帰モデルにおける「定常性」の条件は比較的明確に定義することができた。このような意味で、いまや「ファジー時系列解析モデル」を確定できることになったと言うことができるであろう。

（1）自己回帰モデル＜ＡＲモデル＞

確率モデルの自己回帰モデルは、

$$X_t = \alpha + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_n X_{t-n} + \varepsilon_t \qquad -(33)$$

※　α：コンスタント項
a_i：パラメータ
ε_i：確率的誤差項

のように表すことができる。これに対し、「ファジー自己回帰モデル」もほぼ同様の形式で、

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_n X_{t-n} + |F_t| \qquad -(34)$$

※　a_i：パラメータ
$|F_i|$：ファジーエリア

と表示することができる。

ここで、定常性の条件は、

$$\Sigma a_i < 1$$

のもとに、

$$\mu = \frac{\Phi}{1 - \Sigma a_i} \qquad -(30)$$

であることは前述のとおりである。

実は、いままで公表されてきた「ファジー回帰システム」の何れもが、この「定常性」の条件を満たしているものではなかった。したがって、もし、これらの「ファジー回帰システム」を使用して「時系列解析」を行うことは多くの問題点の存在するところであったと言うことができるのである。＊3

したがって、上記の「ファジー定常性」をクリアし得る「ファジー自己回帰モデル」および、その計算プロセスのアルゴリズムを呈示することが求められるのである。この点に

＊3　これについては筆者は「ファジー時系列解析モデルの新手法の開発と適用－その１；ファジー自己回帰モデルの新手法の理論的考察－」『松阪大学紀要』第15号，1997年に指摘しておいた。

ついては、以下のようにまとめることができるであろう。　まず、「ファジー自己回帰モデル」について

$$X_j = \Sigma\ (a_i X_j \pm F_{ij}) \qquad -(35)$$

というように、各説明変数となる変数にファジーエリアが存在すると考えよう。　しかし、これは

$$X_j = \Sigma a_i X_{j-i} \pm \Sigma F_{ij}$$

とできるものであり、

$$X_j = \Sigma a_i X_{j-i} \pm F_j \qquad -(36)$$

と書き直すことができる。

この（36）式から、

$$\left(1 \pm \frac{F_j}{X_j}\right) = \frac{\Sigma a_i X_{j-i}}{X_j} \qquad -(37)$$

が導出できる。いうまでもなく、この式は（30）式に対応するものであり、（30）式を変形することによって（37）式と同型式の式を導出することができる。この点で、（37）式によってパラメータを推定することができれば、「ファジー定常性」をクリアする「自己回帰モデル」が推定できることになるはずである。

さて、ここで、

$$\Phi_j = \frac{F_j}{X_j}$$

とすると、このΦの値を最小にするようにaパラメータの値を推定できればよいのである。

すなわち、この問題は

$$(1 + \Phi_j) \geqq (\Sigma a_i X_{j-i} / X_j) \qquad -(38)$$

$$(1-\Phi_j) \leqq (\Sigma a_i X_{j-i} / X_j) \qquad -(39)$$

のもとに、

$$\min(\Sigma \Phi_j) = J(\Phi) \qquad -(40)$$

を求めるという「線形計画」の問題に帰するものとなり、これによって解を得ることができるようになる。

さて以上によって、ファジーシステムにおける「自己回帰モデル」のパラメータの推定を行うことができることになる。

なお、「時系列解析システム」には「自己回帰モデル」のほかに、「移動平均モデル（ＭＡモデル）」および「ＡＲＭＡモデル」等がよく知られている。これらは、周知のように、確率的「定常過程」をどのようにフォローするかという点で「違った解釈のモデル」として展開されているものである。ファジーシステムにおいても、ほとんど同じ意味で、「ファジー定常性」をフォローするという立場で、この確率モデルに対応したモデルを考えることができるのではないであろうか。

以下に、これらのモデルについて考えることにしよう。

（２）ファジーＭＡモデル

周知のように、確率的移動平均モデル（ＭＡモデル）は、時系列をラグ付きの確率的誤差項の加重平均として考えるもので、自己回帰モデルが時系列を過去の値と確率的誤差項の加重平均とするものという点では異なったモデルとなっている。いわば、全ての時系列を誤差項だけの加重平均とした「移動平均過程」で説明するというものである。

すなわち、ＭＡモデルは

$$X_t - \mu = \varepsilon_1 - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots\cdots - \theta_n \varepsilon_{t-n} \qquad -(41)$$

※μ：平均，ε：誤差項，θ：パラメータ

という形式のモデルとなっているのである。

このモデルでは、いうまでもなく「自己回帰モデル」が過去の値を説明変数とした多元回帰モデルとして解を得ることができるのに対して、多元回帰の直接的利用によるアルゴリズムは適用できないものである。そのために、「ユールウォーカー方程式」等のように「自己相関」を利用してパラメータの解を得るという方法が採られる。

さて、ファジーシステム上では、この「ＭＡモデル」に対応するものとしては上式の確率的誤差項を「ファジーエリア」に置き換えたモデルを考えることができる。

この場合、ファジーエリアをC_tとして、

$$X_t = C_t - aC_{t-1} - a^2C_{t-2} - \cdots - a^nC_{t-n} \quad -(42)$$

のように定式化することができる。

ここで、Xの平均をμとすると

$$\mu = \frac{\Sigma C_t}{n} - \frac{a\Sigma C_{t-1}}{n} - \frac{a^2\Sigma C_{t-2}}{n} - \cdot\cdot - \frac{a^n\Sigma C_{t-n}}{n} \quad -(43)$$

とすることができる。

さらに、「ファジー定常性」が前提できるなら、

$$C = \frac{\Sigma C_t}{n} = \frac{a\Sigma C_{t-1}}{n} = \cdot\cdot = \frac{a^n\Sigma C_{t-n}}{n} \quad -(44)$$

であることによって、

$$\mu = C - aC - a^2C - \cdots - a^nC \quad -(45)$$

ないし、

$$C = \frac{\mu}{1 - a - a^2 - \cdots - a^n} \quad -(46)$$

が得られる。

ここで、もしC（ファジーエリア）が既知の値であるとすると、パラメータａの値は決定されることになる。このことは、ある一定の値のCの設定にもとづいてパラメータが決定されることであると換言できるものである。また、逆に「平均μ」と「パラメータａ」が確定される場合において、「ファジーエリアC」は一意的に与えられるものということもできるのである。

このように、「ファジーMAモデル」は「ファジー自己回帰モデル」にはない面白い特徴を有したものとなっている。

（３）ファジーＡＲＭＡモデル

確率モデルのＡＲＭＡモデルは、周知のように

$$X_t = \alpha + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots\cdot + a_n X_{t-n}$$
$$+ \varepsilon_1 - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots\cdot - \theta_n \varepsilon_{t-n} \qquad -（47）$$

※　α：コンスタント項
　a_i：パラメータ（ＡＲ過程）
　ε_i：確率的誤差項
　θ：パラメータ（ＭＡ過程）

のような形式のモデルである。すなわち、ＡＲモデル（自己回帰モデル）とＭＡモデル（移動平均モデル）を混合させたものとなっている。このため、ＡＲＭＡモデルといわれるのである。

ファジーシステムにおいて、この「ＡＲＭＡプロセス」を導入する場合、

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots\cdot + a_n X_{t-n}$$
$$+ C_t - b C_{t-1} - b^2 C_{t-2} - \cdots - b^n C_{t-n} \qquad -（48）$$

※　a_i：パラメータ（ＡＲ過程）
　b：パラメータ（ＭＡ過程）
　$|F_i|$：ファジーエリア（ＡＲ過程）
　C_t：ファジーエリア（ＭＡ過程）

と表示することができる。

上式は、さらに

$$X_t - a_1 X_{t-1} - a_2 X_{t-2} - \cdots\cdot - a_n X_{t-n}$$
$$= C_t - b C_{t-1} - b^2 C_{t-2} - \cdots - b^n C_{t-n} \qquad -（49）$$

とできる。

なお、（34）式より、

$$|F_t| = X_t - a_1 X_{t-1} - a_2 X_{t-2} - \cdots\cdot - a_n X_{t-n}$$

とできることから、

$$|F_t| = C_t - bC_{t-1} - b^2C_{t-2} - \cdots - b^nC_{t-n} \qquad -(50)$$

を得る。

このファジーＡＲＭＡ過程が、「ファジー定常性」を満たすものと仮定するならば、すなわち

$$|F_t| = |F_{t-1}| \qquad -(51)$$

かつ、

$$C = \frac{\Sigma C_t}{n} = \frac{b\,\Sigma C_{t-1}}{n} = \cdots = \frac{b^n\,\Sigma C_{t-n}}{n} \qquad -(52)$$

となるならば、

$$|F_t| = C - bC - b^2C - \cdots - b^nC \qquad -(53)$$

という式を導出できる。

したがって、

$$C = \frac{|F_t|}{1 - b - b^2 - \cdots - b^n} \qquad -(54)$$

を得るわけである。

これは、(46) 式を拡張したものとなっているが、ＡＲ過程のファジーエリア$|F_t|$が自己回帰モデルのところで述べたアルゴリズムによって算定することができれば、(46) 式と同様の意味を有する式となり、Ｃが何らかの方法で決定されるならば、パラメータｂの値が得られることになる。

なお、パラメータａの値は「自己回帰モデル」のところですでに述べた手法によって得られることは言うまでもない。

このように、「ファジーＡＲＭＡモデル」は「ファジーＡＲモデル」と「ファジーＭＡモデル」の両方を拡張したモデルとなっていると言うことができるのである。

7. ファジーＡＲＭＡ定理

さて以上に述べたように、「ファジーＡＲＭＡモデル」は「自己回帰（ＡＲ）過程」と「移動平均（ＭＡ）過程」を合成したものであるが、実は、それぞれの過程で前提されて

いる「ファジーエリア」が相互にどのような関係を有しているかということが問題となってくるはずである。

　まず、ＭＡ過程のファジーエリアとＡＲ過程のファジーエリアが等しいとき、すなわち、

$$C = |F_t|$$

が成立するときは、

$$b + b^2 + \cdots + b^n = 0$$

でなければならないことは明らかである。

したがって、両ファジー過程のファジーエリアが同値ということは、実はファジーＡＲ過程しか成立しないということを意味しているのである。

これを「強ファジーＡＲＭＡ定理」と名付けることにしよう。

一方、

$$C \neq |F_t|$$

であり得ること、すなわち、ＭＡ過程とＡＲ過程のファジーエリアの違いが存立する場合は、以下のように定義することができる。

すなわち、(54) 式から、

$$1 - b - b^2 - \cdots - b^n = \frac{|F_t|}{C} \quad -(55)$$

を得る。ここで、

$$b > 0$$

であるかぎり、

$$1 - b - b^2 - \cdots - b^n < 1$$

でなければならないことになる。これより、

$$\frac{|F_t|}{C} < 1$$

すなわち、

$$C > |F_t|$$

が得られることになる。

　したがって、ＭＡ過程のファジーエリアの値とＡＲ過程のファジーエリアの値が異なる場合、

$$C > |F_t|$$

という関係が導かれることになる。

このことを「弱ファジーＡＲＭＡ定理」と名付けることとする。

この定理が意味するところは、「ＡＲモデル」のファジーエリアよりも、「ＭＡモデル」のファジーエリアが大きな値を示す、すなわち「大きな可能性」を示すということである。したがって、「ＭＡモデル」のファジーエリアＣは、「ＡＲモデル」のファジーエリア $|F_t|$ を拡張したものとなるということができるのである。

8. 結　語

上述したように、「時系列解析」において、「定常性」が満たされるということが「時系列解析モデル」における大きな条件であるということは異論のないところであろう。

これまでに、研究開発されてきた「ファジー回帰分析」は多くの優れた研究にも使用され、その理論的裏付けも確固たるものであることは言うまでもない。しかし、こと時系列解析という面においては、上記の定常性を満たすシステムとなっておらず、むしろ、パラメータをファジー数とするという特徴からモデルは発散的傾向を有すものとなることが多いのである。

したがって、時系列解析モデルの推定を行った場合、そのモデルは自ずと時間変数の値が大きくなるにつれてファジーエリアの値も大きくならざるを得ないということになる。この点において、「一定のシステム」が維持されるという時系列解析モデルの意義と矛盾を呈しかねない結果ともなるのである。

すなわち、「ファジー回帰分析」を一種の「区間解析」としてみるならば、この問題点は明瞭であろう。

さて、本論で述べた「ファジー回帰システム」は、こうした問題点を克服し、「時系列解析」に適用できる「ファジーシステム」を提唱するという目的の下に筆者が開発したものであるが、確率的時系列解析モデルで開発されてきた諸モデルへの「ファジーシステム」の適用の可能性を確認することができたのではないであろうか。

参 考 文 献

（１）青木正直『時系列解析と日本経済』、東洋経済新報社，1984年。
（２）赤池弘次・北川源四郎『時系列解析の実際ＩⅡ』、朝倉書店、1995年。
（３）浅野喜代治・寺野寿郎・菅野道夫『ファジィシステム入門』、オーム社、1987年。
（４）浅野喜代治　編著『ファジィ経営科学入門』、オーム社，1992年。
（５）勝木太一「企業行動における意思決定構造の考察（その１）」、『松阪政経研究』、vol. 12、No. １、松阪大学、1993年。
（６）勝木太一「ファジー時系列解析モデルの新手法の開発と適用（その１）」、『松阪政経研究』、vol. 15、松阪大学、1997年。
（７）勝木太一「ファジー時系列解析モデルの新手法の開発と適用（その２）」、『松阪政経研究』、vol. 16，松阪大学、1998年。
（８）勝木太一『経済統計学』、開成出版、1995年。
（９）勝木太一『経済現象の計量モデル分析』、大学教育出版、1997年。
(10) 刈屋武昭『計量経済分析の基礎と応用』東洋経済新報社、1985年。
(11) 刈屋武昭・照井伸彦『非線形時系列分析法とその応用』、岩波書店、1997年。
(12) 染谷恭次郎・木下照嶽『経営分析－基礎と実践』、森山書店、1979年。
(13) 田中英夫『ファジィモデリングとその応用』、朝倉書店、1990年。
(14) 廣末毅・浪花貞夫『経済時系列分析の基礎と実際』、多賀出版，1993年。
(15) 水本雅晴『ファジイ理論とその応用』、サイエンス社、1988年。
(16) A. Zellner, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics,* John Wiley & Sons, Inc., 1971.
(17) R. E. Bellmann & L. H. Zadeh,“ Decision Making in a Fuzzy Environment”, *Management Sci.,* 17,1970.
(18) R. M. Cyert & March, J. G., *A Behavioral Theory of Firm,* 1963.
(19) D. Dubois,“ Linear Programming with Fuzzy Data”, in J. C. Bezdek Ed., *Analysis of Fuzzy Infomation* Vol.3, CRC Press 1987.
(20) H. J. Zimmermann,“ Description and Optimization of Fuzzy Systems”, *Journal of General Systems,* 2, 1976.
(21) H. J. Zimmermann“ Fuzzy programming and linerar programming with several objective Function”, *Fuzzy Sets and System,* 1, 1978.
(22) W. Vandaels, Applied *Time Series and Box-Jenkins Models,* Academic PRESS, Inc., 1983.