

# オイラー・丸山簡易スキームの数値的安定性

齊 藤 善 弘

## 概要

確率微分方程式の数値的安定性は、数値スキームの収束性と同様に重要な概念である。本論文ではオイラー・丸山簡易スキームに対して、2種類の数値的安定性 ( $E$  安定性と  $T$  安定性) を考察し、数値シミュレーションによる検証を行う。

## 1 はじめに

確率微分方程式の数値スキームの研究において、数値的安定性はスキームの収束性と同様、重要な概念である。確率微分方程式の数値的安定性の解析法には、大きく二つに分けられる。一つは確率微分方程式の解のモーメント、すなわち解の平均や2次モーメントに関する安定性である。もう一つは解の軌道に関する安定性である。我々は前者を  $M$  安定性 (Moment stability)、後者を  $T$  安定性 (Trajectory stability) と名付けた [10]。本論文では、 $M$  安定性の一つで、Abukhaled & Allen [1] が提案した  $E$  安定性 (Expectation stability) と、 $T$  安定性について述べる。数値スキームは平均値を求めるのに最適な弱い近似を考え、最も基本的なオイラー・丸山簡易スキームを取り上げることにする。次節では、 $E$  安定性と  $T$  安定性を紹介し、オイラー・丸山簡易スキームに対し安定性解析を行う。そして、数値シミュレーションによる検証を行い (3節)、二つの安定性の特徴と問題点について触れる。

## 2 確率微分方程式の線型安定性解析

つぎの乗法的ノイズをもつ線型の1次元伊藤型テスト方程式を考える。

$$dX = \lambda X dt + \mu X dW(t), \quad X(0) = 1 \quad (1)$$

ここで、 $\lambda$  と  $\mu$  は実数とする。方程式 (1) の解析解は

$$X(t) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + W(t)\right) \quad (2)$$

となる。確率定性理論によれば、解 (2) は  $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$  のとき、平衡解 (equilibrium

solution)  $X(t) \equiv 0$  が大域的確率漸近安定になる。ハシミンスキー (R. Z. Has'minskii) [4] が与えた定義に沿って、平衡解の大域的確率漸近安定を述べる。まず、1次元伊藤型方程式

$$dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X)dW(t) \quad (3)$$

は平衡解  $X(t) \equiv 0$  をもつとする。つまり  $f(t, 0) = 0$ ,  $g(t, 0) = 0$  をみたく。さらに、初期値  $X(t_0)$  を実数  $x_0$  とし、方程式 (3) は  $t \geq t_0$  で解  $X(t) = X(t; t_0, x_0)$  の存在性と一意性を仮定する。

**定義 1** 確率微分方程式 (3) の解  $X(t) \equiv 0$  が確率的に安定 (stochastically stable)、確率漸近安定 (stochastically asymptotically stable)、大域的確率漸近安定 (stochastically asymptotically stable in the large) であるとは、次の条件が順番に満たされることである。

(i) 任意の正数  $\varepsilon$  と任意の  $t_0$  に対して

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P(\sup_{t \geq t_0} |X(t; t_0, x_0)| \geq \varepsilon) = 0$$

が成り立つ。

(ii) 条件(i)に加えて

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P(\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t; t_0, x_0)| = 0) = 1$$

が成り立つ。

(iii) 条件 (i, ii) に加えて、任意の初期値  $x_0 \in \mathbb{R}$  に対して

$$P(\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t; t_0, x_0)| = 0) = 1$$

が成り立つ。

他方、数値解の安定性は、方程式の解が確率過程になるから、常微分方程式の場合と異なり、決定論的な解析ができない。つまり、テスト方程式 (1) に数値スキームを単純に適用すると、

$$\bar{X}_{n+1} = R(\lambda, \mu, h, \xi_n) \bar{X}_n$$

が導かれるが、関数  $R(\lambda, \mu, h, \xi_n)$  の値が確率変数となる。ここで、 $\{\bar{X}_n\}$  は数値スキームによる離散近似列を、 $h$  と  $\xi_n$  は各々数値スキームに現れるステップ幅と確率変数を表す。関数  $R$  を決定論的に扱うために、その期待値をとることを考える。ここでは二つの方法を紹介する。一つは集合平均をとる方法で、これから導出される安定性を  $E$  安定性と呼び [1]、もう一つは時間方向での平均をとる方法で、 $T$  安定性と呼ぶ [9]。まず、 $E$  安定性について述べよう。

テスト方程式の解の平均関数は

$$E(X(t)) = \exp(\lambda t)$$

となるから [2,6]、 $\lambda < 0$  のとき、

$$E(X(t)) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$$

である。よって、 $\lambda < 0$  のとき、数値スキームによる数値解が

$$E(\bar{X}_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (4)$$

をみたととき、数値スキームは  $E$  安定であると言う。

ここで、最も基本的な数値スキームであるオイラー・丸山スキームを紹介する。伊藤型方程式 (3) に対し、ステップ幅  $h$  の離散点列  $\{t_n\}$  ( $t_n = t_0 + nh$ ,  $T = t_N$ ) としたとき、オイラー・丸山スキームは、つぎの形で与えられる。

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta W_n \quad (5)$$

スキームに現れる、 $h = t_{n+1} - t_n$  は時間方向の増分、 $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  はウィナー過程の増分を意味する。 $\Delta W_n$  は平均 0, 分散 1 の標準正規乱数  $\xi_n$  を使用し、 $\Delta W_n = \xi_n \sqrt{h}$  のように模擬する。ところが、解の平均や分散などの統計量を近似する場合は、つぎの性質をもつ近似正規乱数で置き換えてもよいことが知られている [6]。

$$E(\Delta \widehat{W}_n) = E((\Delta \widehat{W}_n)^3) = 0, E((\Delta \widehat{W}_n)^2) = h \quad (6)$$

この性質をみたと方法として、例えば 2 点分布確率変数

$$P(\Delta \widehat{W}_n = \pm \sqrt{h}) = \frac{1}{2} \quad (7)$$

がある。近似正規乱数を用いたスキームを簡易スキーム (simplified scheme) と呼ぶことにし、スキーム (5) に対し、

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta \widehat{W}_n \quad (8)$$

と表現する。

さて、オイラー・丸山簡易スキームの  $E$  安定性について調べよう。前述の関数  $R$  は、常微分方程式の線型安定性解析では、安定性関数と呼ばれていることから [7,8]、 $R$  の集合平均をとった関数  $R_E$  を  $E$  安定性関数と呼ぼう。オイラー・丸山簡易スキームの  $E$  安定性関数は

$$R_E(\lambda h) = 1 + \lambda h$$

となる。数値解が  $E$  安定となる条件は  $|R_E(\lambda h)| < 1$  であるから、

$$-2 < \lambda h < 0 \quad (9)$$

となる。

つぎに  $T$  安定性について述べる。 $T$  安定性は時間方向での平均を考える。すなわち、

$$\bar{X}_{n+1} = R(\lambda, \mu, h, \xi_n) \bar{X}_n$$

を繰り返し適用し、両辺の絶対値をとることで、

$$|\bar{X}_{n+1}| = |R(\lambda, \mu, h, \xi_n)| |\bar{X}_n| = \cdots = \prod_{i=0}^n |R(\lambda, \mu, h, \xi_i)| |X(0)| \quad (10)$$

を得る。ここからステップ方向での平均化された 1 階差分方程式

$$|\bar{X}_{n+1}| = R_T(h; \lambda, \mu) |\bar{X}_n| \quad (11)$$

を導出する必要がある。このとき、Higham が示した、つぎの補題が役に立つ [5]。

**補題 1** 独立かつ同一に分布される、非負の実数の確率変数  $\{Z_i\}$  が与えられていて、

$$Y_n = \left( \prod_{i=0}^{n-1} Z_i \right) Y_0$$

で定義される確率変数の列  $\{Y_n\}$  を考える。ここで  $Y_0 \geq 0$ 、確率 1 で  $Y_0 \neq 0$  をみたしている。確率変数  $\log(Z_i)$  が 2 乗可積分であると仮定すると、

$$\text{確率 1 で } \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0 \Leftrightarrow \text{すべての } i \text{ に対して } E(\log(Z_i)) < 0$$

が成り立つ。

補題 1 を (10) に適用すると、(11) 式を導くことができる。(11) 式に現れる関数  $R_T(h; \lambda, \mu)$  を  $T$  安定性関数と呼ぼう。もちろん、補題より

$$R_T(h; \lambda, \mu) < 1 \quad (12)$$

と

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{X}_n| = 0) = 1 \quad (13)$$

は同値になる。よって、 $T$  安定性はつぎのように定義される [3,9]。

**定義 2** ウィナー過程の増分  $\Delta \widehat{W}_n$  をもつ数値スキームが  $T$  安定であるとは、組  $(h; \lambda, \mu)$  の値に対して、その  $T$  安定性関数  $R_T(h; \lambda, \mu)$  が (12) 式をみたすことである。

オイラー・丸山簡易スキーム (8) の  $T$  安定性関数は、補題 1 より

$$R_T(h; \lambda, \mu) = \sqrt{|(1 + \lambda h)^2 - \mu^2 h|}$$

となる。よって、数値解が  $T$  安定となる条件は、 $T$  安定性関数が  $\bar{h} = \lambda h$  と  $k = \mu^2 / \lambda$  で表現されるから、 $E$  安定と異なり、1 次元ではなく 2 次元で考える必要がある。縦軸を  $\bar{h}$ 、横軸を  $k$  とし、 $T$  安定となる領域、すなわち (12) 式をみたす領域に陰影をつけたのが図 1 である。

### 3 数値実験

本節では、前節で述べた数値的安定性の結果に対して、数値シミュレーションによる検証を行う。まず、テスト方程式 (1) において、 $\lambda$  と  $\mu$  の組を、つぎのように選ぶ。

- (i)  $(\lambda, \mu) = (-100, 0)$
- (ii)  $(\lambda, \mu) = (-200, 0)$
- (iii)  $(\lambda, \mu) = (-200, 10)$
- (iv)  $(\lambda, \mu) = (-100, 10)$

表 1 テスト方程式に対するオイラー・丸山簡易スキームの  $E$  安定性と  $T$  安定性

テスト方程式	ステップ幅	$E$ 安定性	$T$ 安定性
(i)	0.005	安定	安定
	0.0125	安定	安定
	0.025	不安定	不安定
(ii)	0.0075	安定	安定
	0.01	不安定	不安定
	0.015	不安定	不安定
(iii)	0.0075	安定	安定
	0.01	不安定	安定
	0.015	不安定	不安定
(iv)	0.005	安定	安定
	0.0125	安定	不安定
	0.025	不安定	安定

ここで、(i) と (ii) は常微分方程式、(iii) と (iv) は確率微分方程式である。これらの (i) ~ (iv) の場合において、前節の結果から、 $E$  安定性と  $T$  安定性についてステップ幅  $h$  のオイラー・丸山簡易スキームが安定か否かの関係を表にしたのが表 1 である。テスト方程式の  $\lambda$  の値と  $h$  の与え方により、(i) と (iv) 及び (ii) と (iii) に対する  $E$  安定性の結果が同一となることに注意する。

さて、テスト方程式 (i) に対する数値実験結果を図 2 に、(ii) の結果を図 3 に、(iii) の結果を図 4 に、(iv) の結果を図 5 に示した。数値実験では、平均をとるための生成する軌道の数をも 2000 とした。なお、グラフの縦軸は  $E(X)$ 、横軸は  $t$  である。比較しやすいよう、グラフの表示範囲を、縦軸は  $-1.5$  から  $1.5$ 、横軸は  $0$  から  $0.5$  に設定した。

図 2 と図 3 の結果は常微分方程式の結果である。図 3 の中図 ( $h=0.01$ ) で、振動した数値解を得るが、 $E$  安定の定義により不安定としている。図 2 及び図 3 の下図では両図とも、得られた数値解がグラフの表示範囲外にあることを示しており、数値解が  $0$  に戻ることはなく、不安定であることを意味している。

つぎに確率微分方程式の場合、すなわちテスト方程式 (iii) と (iv) について見よう。 $E$  及び  $T$  に関してともに安定、ともに不安定の場合は、常微分方程式の結果と同様であった。この数値例で興味深いのは、 $E$  安定になるが  $T$  不安定になる場合と、その逆の場合である。まず、 $E$  安定になるが  $T$  不安定になる例を見よう。すなわちテスト方程式 (iv) でステップ幅  $h$  を  $0.0125$  に設定した場合である。対応する数値結果である図 5 の中図を見ると、最初は数値解が安定な様相を呈しているが、徐々に不安定になっていく様子がうかがえる。つまり、 $E$  安定となるための数値スキームの条件 (9) 式でステップ幅を決めたにもかかわらず、結果として  $E$  不安定となっている。これは、解の平均を求めるとき、その標本である軌道が安定 ( $T$  安定) でないと、平均量も安定 ( $E$  安定) でないことを意

味している。今度は、 $T$  安定になるが  $E$  不安定になる例を見よう。この例は二つあり、テスト方程式 (iii) で  $h=0.01$  にとった場合とテスト方程式 (iv) で  $h=0.025$  にとった場合である。前者の結果である図 4 の中図をみると、過渡状態の部分では不安定の様相を示しているが、徐々に安定し、結果として  $E$  安定であることがわかる。ところが、後者の結果である図 5 の下図では、図 4 の中図のような結果を見ることができない。そこで、もう少しグラフの表示範囲を広げて示したのが図 6 である。図 6 からわかるように、図 4 の中図と同様の結果であることがわかる。これは過渡状態の部分では、 $E$  安定の条件 (9) が強く影響していると考えられる。

以上より、数値スキームが  $T$  不安定の場合、数値解が  $E$  不安定になることがわかる。これは  $E$  安定となるためのスキームの条件 (9) 式では不十分で、スキームの  $T$  安定性の吟味を加える必要があることを意味する。また、 $T$  安定で  $E$  不安定である例から見てとれるように、解の平均を求める際は、 $T$  安定性だけでなく、 $E$  安定性についても調べる必要があることを示唆している。ゆえに、確率微分方程式の数値解の平均に関する安定性解析では、スキームの  $T$  安定性と  $E$  安定性の両方を調べる必要がある。

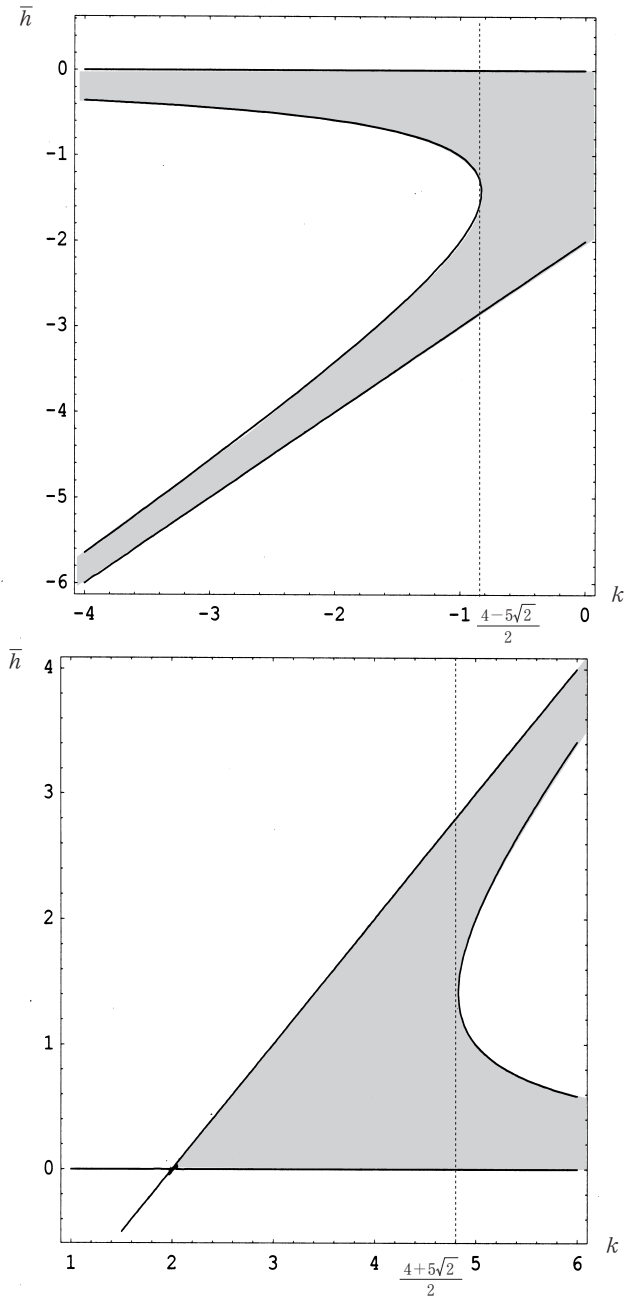


図1. オイラー・丸山簡易スキームの安定領域  
(上図： $-4 \leq k \leq 0$ 、下図： $1 \leq k \leq 6$ )

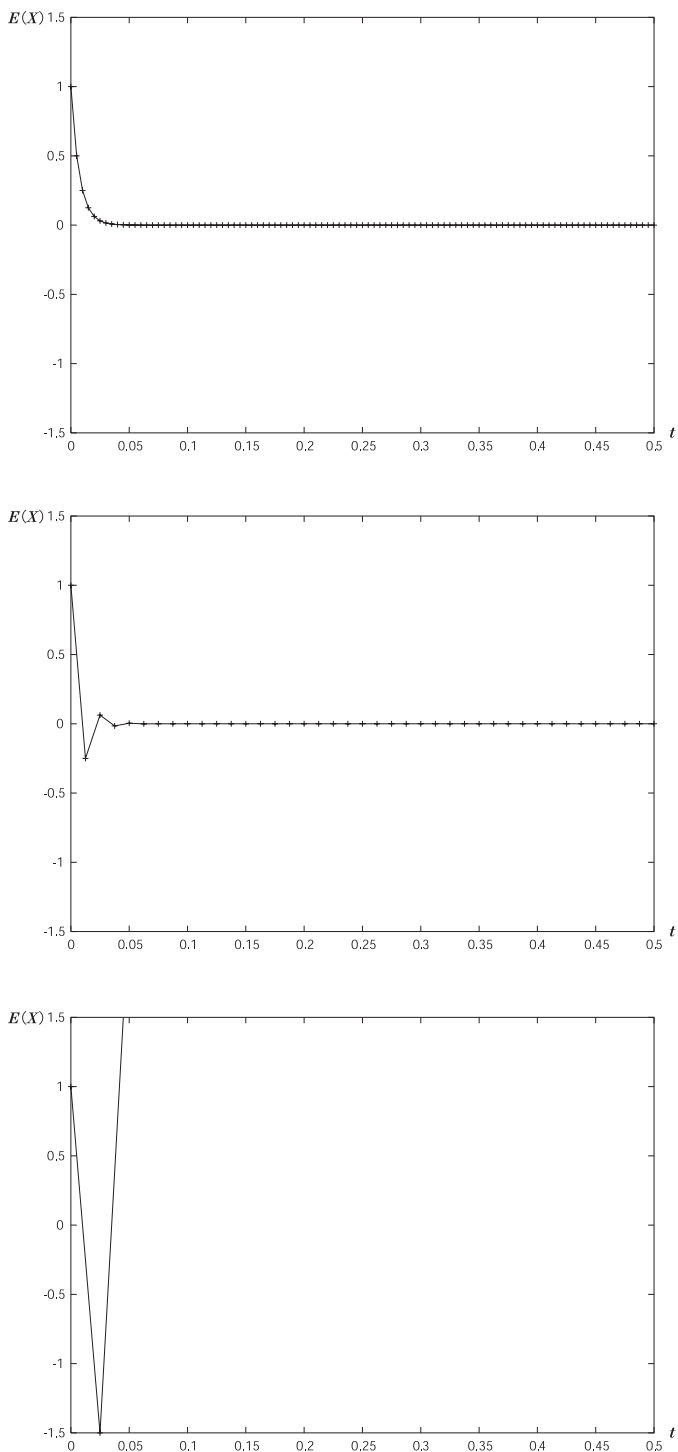


図 2. テスト方程式 (i) のオイラー・丸山簡易スキームによる結果  
(上図:  $h=0.005$ 、中図:  $h=0.0125$ 、下図:  $h=0.025$ )



オイラー・丸山簡易スキームの数値的安定性

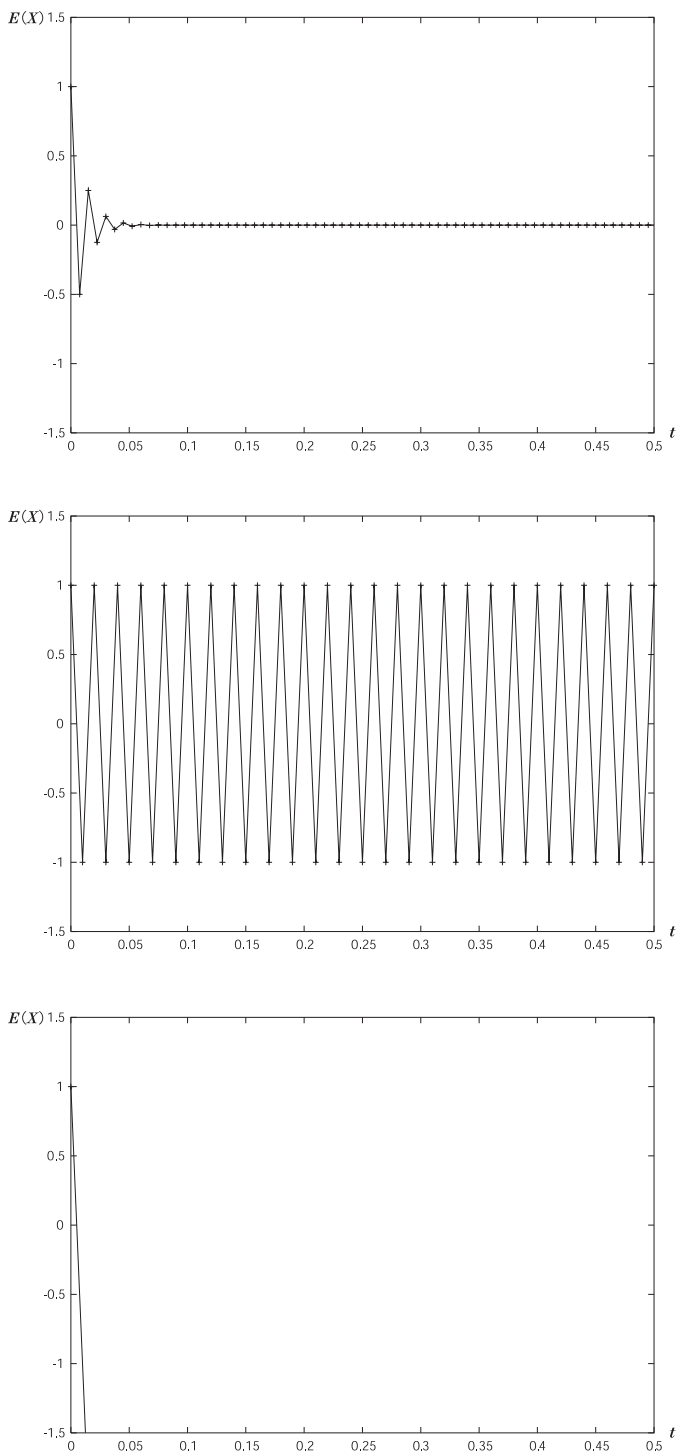


図3. テスト方程式 (ii) のオイラー・丸山簡易スキームによる結果  
(上図： $h=0.0075$ 、中図： $h=0.01$ 、下図： $h=0.015$ )

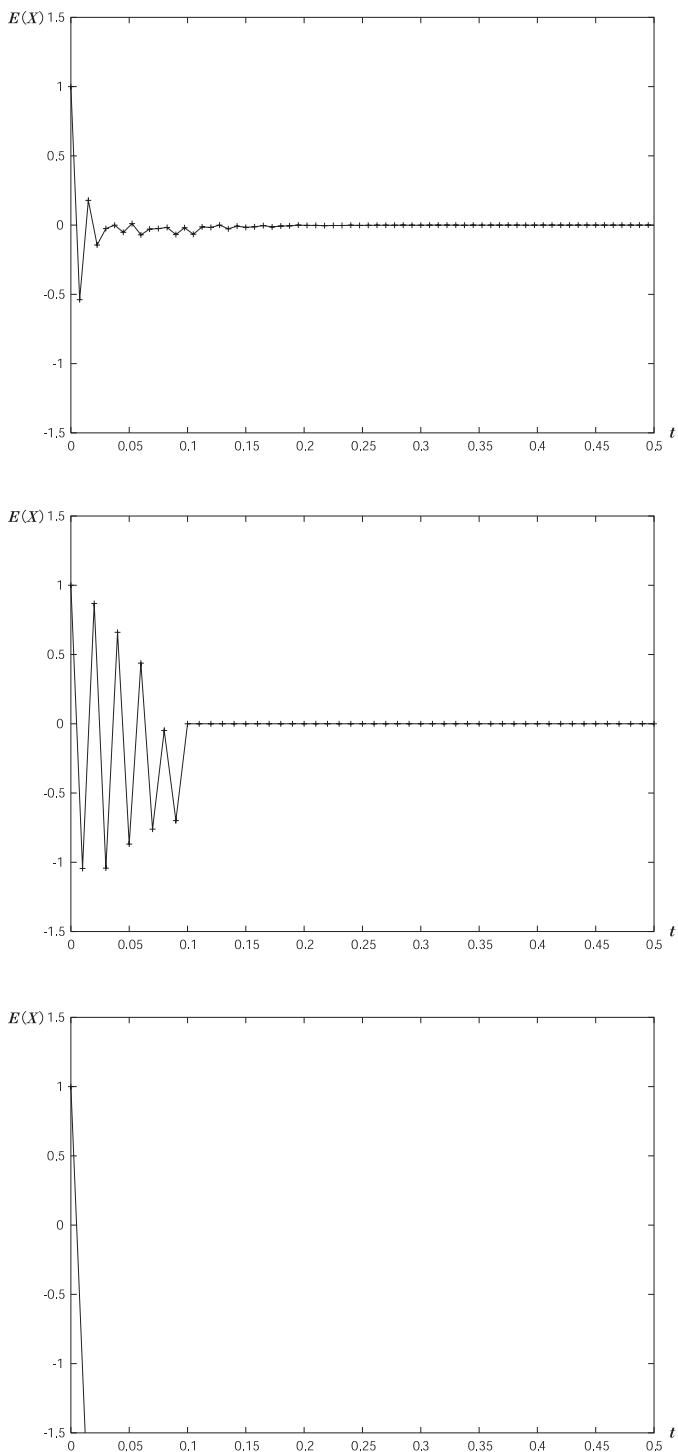


図4. テスト方程式 (iii) のオイラー・丸山簡易スキームによる結果  
(上図： $h=0.0075$ 、中図： $h=0.01$ 、下図： $h=0.015$ )

オイラー・丸山簡易スキームの数値的安定性

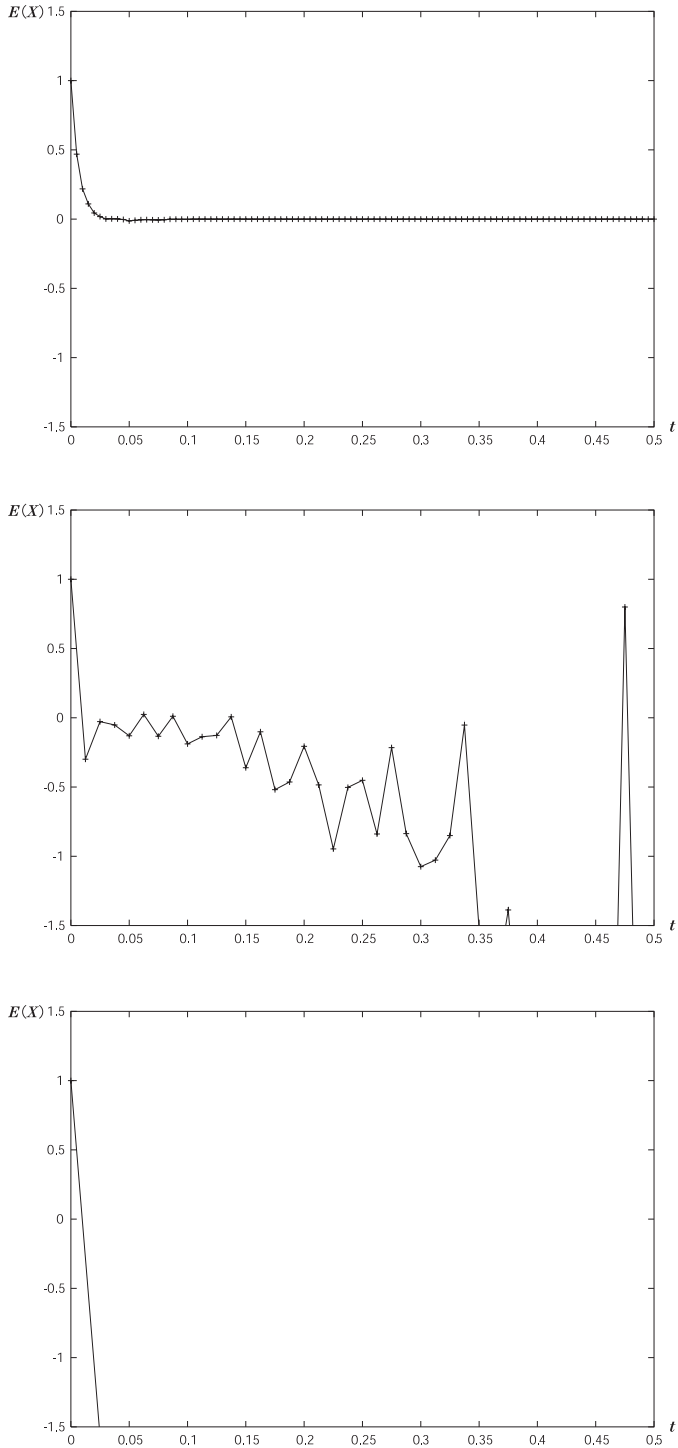


図5. テスト方程式 (iv) のオイラー・丸山簡易スキームによる結果  
(上図:  $h=0.005$ 、中図:  $h=0.0125$ 、下図:  $h=0.025$ )

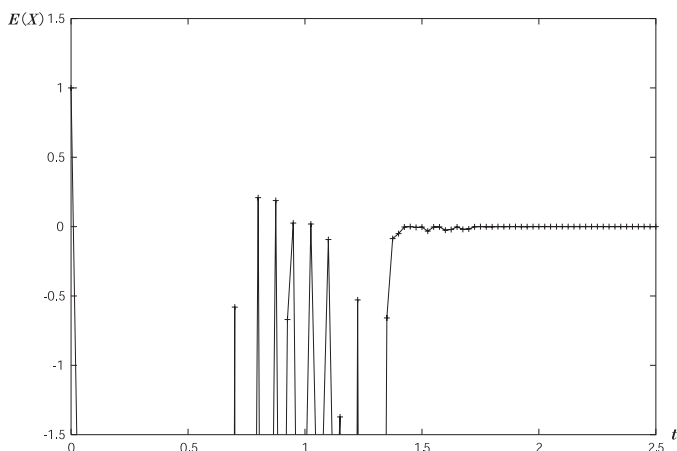


図6. テスト方程式 (iv) のオイラー・丸山簡易スキーム ( $h=0.025$ ) による結果

### 参 考 文 献

- [1] Abukhaled, M.I. and Allen, E.J., Expectation stability of second-order weak numerical methods for stochastic differential equations, *Stochast. Anal. Appl.*, **20** (2002), pp.693-707.
- [2] Gard, T. C., *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker, 1988.
- [3] Burrage, K., Burrage, P. and Mitsui, T., Numerical solutions of stochastic differential equations—implementation and stability issues, *J. Comput. Appl. Math.*, **125** (2000), pp.171-182.
- [4] R. Z. Has'minskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [5] Higham, D. J., Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **38**(2000), pp.753-769.
- [6] Kloeden, P. E., and Platen, E., *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, 1992.
- [7] 三井斌友、「常微分方程式の数値解法」、岩波書店、2003
- [8] 三井斌友、小藤俊幸、齊藤善弘、「微分方程式による計算科学入門」、共立出版、2004
- [9] Saito, Y. and Mitsui, T., T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations, *WSSIAA*, **2**(1993), pp.333-344.
- [10] Saito, Y. and Mitsui, T., Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **33**(1996), pp.2254-2267.