

# 確率微分方程式の弱い近似で使用する 一般 3 点分布確率変数について

齊 藤 善 弘

## 概 要

確率微分方程式の弱い近似スキームで使用される確率変数は正規確率変数である必要はなく、それを近似する確率変数で十分であることが知られている。本稿では多点分布確率変数である一般 3 点分布確率変数に着目し、オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域に含まれる矩形領域が最大となる確率変数を提案する。

## 1. はじめに

1 次元すなわちスカラー-自励系の伊藤型確率微分方程式に対する確率初期値問題 (SIVP)

$$dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = X_0 \quad (1)$$

を考える。ここで  $W(t)$  は標準ウィナー過程である。確率微分方程式の数値スキームの安定性について研究されている [1, 2, 3, 4, 5]。特に Bryden and Higham [1] や Higham [3] は  $\theta$ ・丸山スキーム ( $\theta$ -Maruyama scheme) に対する漸近安定性の結果を与えた。本稿ではオイラー・丸山スキーム ( $\theta = 0$ ) のみを取り扱う。オイラー・丸山スキームは、SIVP (1) の  $t = t_n = nh$  ( $h > 0$ ) における解  $X(t_n)$  に対する近似解を  $X_n$  とすると、次式で与えられる [6]。

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n)\xi_n \sqrt{h} \quad (2)$$

ここで  $h = t_{n+1} - t_n$  はステップ幅を意味し、各  $\xi_n$  は平均 0、分散 1 の独立な標準正規確率変数  $N(0; 1)$  である。また、 $\xi_n \sqrt{h}$  でもってウィナー過程の増分  $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  を模擬する [4]。オイラー・丸山スキームの強い収束次数は 1/2、弱い収束次数は 1 で

ある [4]。オイラー・丸山スキームを弱い近似として使用する場合、標準正規確率変数  $\xi_n$  の代わりにつぎの性質を満たす近似正規確率変数  $\hat{\xi}_n$  で代用しても収束次数 1 を達成することが知られている [4]。

$$\mathbb{E}[\hat{\xi}_n] = \mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^3] = 0, \quad \mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^2] = 1 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbb{E}[\cdot]$  は期待値を表す。性質 (3) を満たす確率変数として、たとえば

$$P(\hat{\xi}_{2,n} = \pm 1) = \frac{1}{2} \quad (4)$$

や

$$\hat{\xi}_{r,n} = \sqrt{12}(u_n - 1/2) \quad (5)$$

がある [4, 7]。ここで  $u_n$  は区間  $[0, 1)$  に分布する一様分布確率変数である。近似正規確率変数 (4) は 2 点分布確率変数と呼ばれる。近似正規確率変数を用いたスキームを簡易スキーム (simplified scheme) と呼ぶことにし、

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n)\hat{\xi}_n \sqrt{h} \quad (6)$$

と表記する。齊藤は、2 つの近似正規確率変数 (4) および (5) を取り上げ、オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性について調べた [8]。そして、新しい近似正規確率変数を提案し、そのオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性を調べ、結果を述べた [9]。これと同様の構成法で弱い 2 次法及び 3 次法に対する近似正規確率変数をつくることができ、多点分布確率変数、矩形近似確率変数及び折れ線近似確率変数をオイラー・丸山簡易スキームに装着した場合の漸近安定性を調べた [10]。また弱い近似に対して安定性の面で優れ、かつ実用的な確率変数の探索が課題であると述べた。本稿では、弱い 2 次法で使用される 3 点分布確率変数を弱い 1 次法の条件 (3) を満たすように一般化し、一般 3 点分布確率変数と呼ぶことにする。そして、一般 3 点分布確率変数を装着したオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域を調べ、安定性の面で優れた確率変数を提案する。

## 2. 漸近安定性解析

オイラー・丸山簡易スキーム (6) の漸近安定性を調べる場合、つぎの乗法的ノイズをもつスカラー線形テスト方程式

確率微分方程式の弱い近似で使用される一般3点分布確率変数について

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = 1 \quad (7)$$

を考える。ここで、定数 $\lambda$ と $\mu$ は実数、ただし $\mu \geq 0$ とする。テスト方程式(7)の厳密解は

$$X(t) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right) \quad (8)$$

となるから、解(8)は $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$ のとき、平衡解 $X(t) \equiv 0$ が大域的確率漸近安定になる。すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0, \quad \text{w.p.1}$$

を満たす。他方、数値スキームによる近似解 $X_n$ が大域的確率漸近安定性と同様の性質、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0, \quad \text{w.p.1} \quad (9)$$

を満たすことが期待される。そこで、数値スキームによる近似解 $X_n$ が性質(9)を満たすとき、数値スキームは漸近安定性をもつと呼ぶことにする [1, 3]。

さて、オイラー・丸山簡易スキーム(6)をテスト方程式(7)に適用すると漸化式

$$X_{n+1} = \left(1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n\right) X_n$$

を得る。ここで、 $p = \lambda h$ 、 $q = \mu^2 h$ とおいた。また、テスト方程式(7)が大域的確率漸近安定となる条件 $\lambda - \mu^2/2 < 0$ は $q > 2p$ となることに注意する。

オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ をつぎのように定義する。

$$\mathcal{R} := \{(p, q) : q \geq 0 \text{ かつ オイラー・丸山簡易スキームが漸近安定性をもつ}\}$$

オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域を描画するのに、Higham が導出したつぎの定理を使う [3]。

**定理 1** 独立かつ同一に分布される、非負の実確率変数 $Z_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ )が与えられていて、

$$Y_n = \left( \prod_{i=0}^{n-1} Z_i \right) Y_0$$

で定義される確率変数の列 $\{Y_n\}$ を考える。ここで  $Y_0 \geq 0$ かつ $Y_0 \neq 0$ , w.p.1を満たしている。確率変数 $\log(Z_i)$ が二乗可積分であると仮定すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0, \quad \text{w.p.1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[\log(Z_i)] < 0, \quad \forall i$$

が成り立つ。

$Y_n = |X_n|$ 、 $Z_i = |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_i|$ として、定理1を適用すると

$$(p, q) \in \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[\log |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n|] < 0, \quad \forall n \tag{10}$$

を得る [1]。ここで $\mathbb{E}[\log |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n|]$ をオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性関数と呼ぶことにする。 $\hat{\xi}_n$ が2点分布確率変数のとき、漸近安定性関数は

$$\mathbb{E}[\log |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n|] = \frac{1}{2} \log |(1 + p)^2 - q| \tag{11}$$

となる。

2点分布確率変数を装着したオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域は図1の塗りつぶした部分になる。ただし、塗りつぶしは $0 \leq q \leq 5$ の範囲で施してある。以降、漸近安定領域の図は境界線のみ表示することにする。

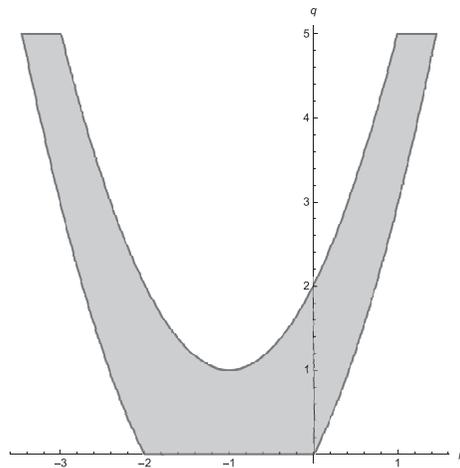


図1. 漸近安定領域 (2点分布確率変数)

弱い2次法に対して、つぎの3点分布確率変数

$$P(\hat{\xi}_{3,n} = \pm\sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \quad P(\hat{\xi}_{3,n} = 0) = \frac{2}{3} \quad (12)$$

がある [4]。弱い1次法の条件 (3) を満たすようにするには

$$P(\hat{\xi}_{3,n}^x = \pm x) = \frac{1}{2x^2}, \quad P(\hat{\xi}_{3,n}^x = 0) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (13)$$

とする。ここでパラメータ  $x \geq 1$  で、 $x = 1$  のとき2点分布確率変数 (4) と、 $x = \sqrt{3}$  のとき3点分布確率変数 (12) と一致する。確率変数 (13) を一般3点分布確率変数と呼ぶことにする。一般3点分布確率変数 (13) をオイラー・丸山簡易スキームに装着した場合の漸近安定領域を  $\mathcal{R}^x$  と表記する。次節で安定領域  $\mathcal{R}^x$  について考察する。

### 3. 考察

本稿で安定性に優れるとは、領域  $\mathcal{R}^x$  の部分集合で、つぎのような矩形領域  $\mathcal{R}^*$

$$\mathcal{R}^* := \{(p, q) : -2 < p < 0, 0 \leq q < b\}$$

の大きさ、つまり矩形領域の高さ  $b$  の値を尺度として使用する。たとえば、2点分布確率変数の場合、矩形領域  $\mathcal{R}^*$  を図2に示す。領域の高さ  $b$  が1であることは漸近安定性関数 (11) から容易に示すことができる。

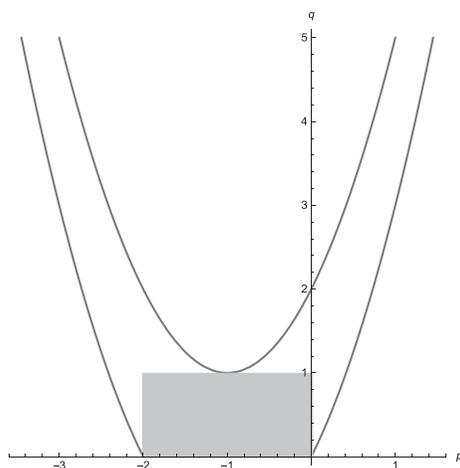


図2. 矩形領域 (2点分布確率変数)

一般3点分布確率変数 (13) に対する漸近安定性関数は

$$\mathbb{E} \left[ \log |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n| \right] = \frac{1}{2x^2} \log |(1 + p)^2 - x^2q|(1 + p)^{2|x^2-1}| \quad (14)$$

となる。  $x = 1.5$  のときの一般3点分布確率変数の漸近安定領域を図3に示す。漸近安定領域に含まれる矩形の高さを決めることは、図4に示す曲線の最小値を求めることになる。

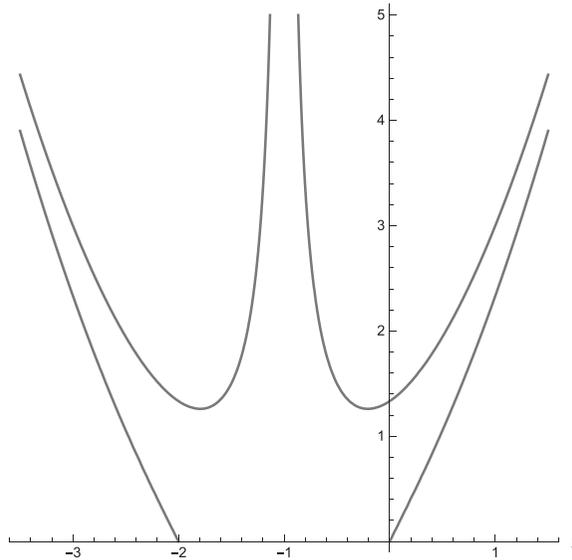


図3. 漸近安定領域 (一般3点分布確率変数)

図4に現れる曲線の方程式は

$$(x^2q - (1 + p)^2)(1 + p)^{2(x^2-1)} = 1 \quad (15)$$

である。式(15)から曲線は  $p = -1$  に関して対称である。まず、曲線の最小となる点の  $p$  座標を求める。式(15)を  $p$  で微分すると

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{x^2} \left\{ 2(1 + p) + 2(1 - x^2)(1 + p)^{1-2x^2} \right\}$$

を得る。 $\frac{dq}{dp} = 0$  とおき、整理すると

$$(1 + p)^2 = (x^2 - 1)^{\frac{1}{x^2}}$$

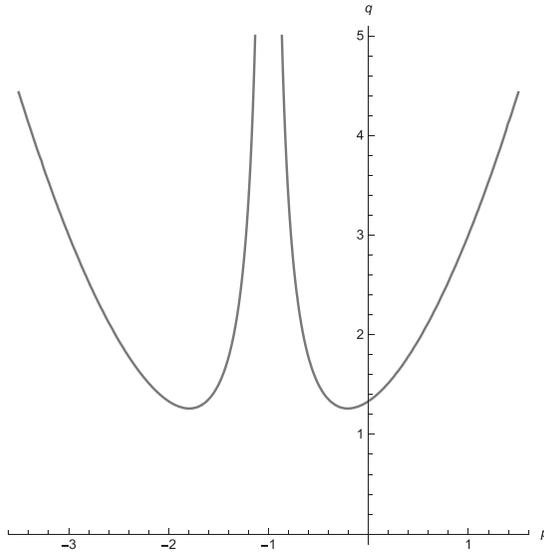


図4. 考察する曲線

が得られる。すなわち

$$p = -1 \pm (x^2 - 1)^{\frac{1}{2x^2}}$$

のとき、最小値

$$\frac{1}{x^2} \left\{ (x^2 - 1)^{\frac{1}{x^2}} + (x^2 - 1)^{\frac{1-x^2}{x^2}} \right\}$$

をとる。したがって、 $z = x^2$  とおき、最小値の関数  $H(z)$  ( $z \geq 1$ ) を次式で定義する。

$$H(z) := \frac{1}{z} \left\{ (z-1)^{\frac{1}{z}} + (z-1)^{\frac{1-z}{z}} \right\} \quad (16)$$

関数  $H(z)$  ( $1 \leq z \leq 5$ ) のグラフを図5に示す。

図5のグラフから  $z = 1.2$  と  $z = 1.4$  の間で  $H(z)$  が最大となることがわかる。関数  $H(z)$  を  $z$  で微分すると

$$\frac{dH}{dz} = \frac{(z-1)^{\frac{1}{z}-1} \left( \frac{\frac{1}{z}-1}{z-1} - \frac{\log(z-1)}{z^2} \right) + (z-1)^{1/z} \left( \frac{1}{(z-1)z} - \frac{\log(z-1)}{z^2} \right)}{z} - \frac{(z-1)^{\frac{1}{z}-1} + (z-1)^{1/z}}{z^2}$$

となる。方程式  $\frac{dH}{dz} = 0$  の近似解をニュートン法で求めると

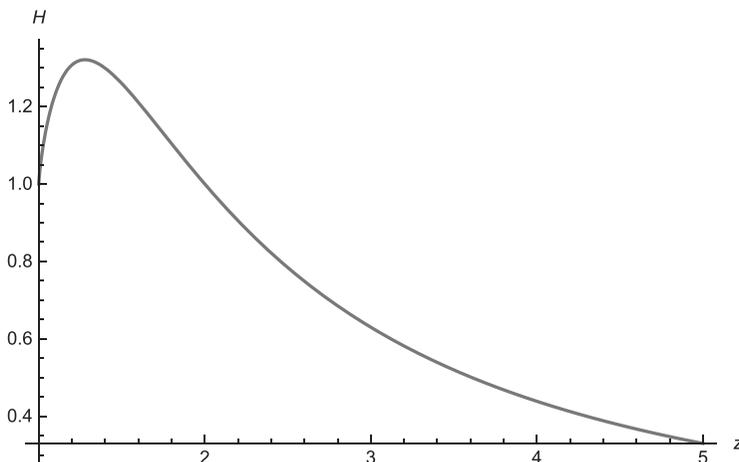


図 5. 関数  $H(z)$  のグラフ

$$z^* = 1.2784645427610708$$

を得る。 $H(z^*)$  の値は 1.32109976197733 であり、この値を  $H(z)$  の最大値とする。一般 3 点分布確率変数 (13) の確率に  $\frac{1}{2z^2} = \frac{1}{2z}$  が現れるので、コンピュータへの実装、つまりコーディングを考慮すると  $z$  の値は分数が望ましい。分母が 64 の場合で候補を探すと

$$\frac{80}{64}, \quad \frac{81}{64}, \quad \frac{82}{64}, \quad \frac{83}{64}$$

が見つかる。このとき  $H(z)$  の値は順に

$$1.31951, \quad 1.32079, \quad 1.321085, \quad 1.32049$$

である。したがって、この候補の中で矩形領域が最大となるのは  $\frac{82}{64}$  であることがわかる。しかも、関数  $H(z)$  の最大値に最も近い。以上から、安定性に優れた一般 3 点分布確率変数  $\hat{\xi}_{3,n}^{\sqrt{82}/8}$  を提案する。

$$P(\hat{\xi}_{3,n}^{\sqrt{82}/8} = \pm \frac{\sqrt{82}}{8}) = \frac{16}{41}, \quad P(\hat{\xi}_{3,n}^{\sqrt{82}/8} = 0) = \frac{9}{41} \tag{17}$$

さらに、確率変数 (17) に劣るが簡単な数字になることから、確率変数  $\hat{\xi}_{3,n}^{9/8}$

$$P(\hat{\xi}_{3,n}^{9/8} = \pm \frac{9}{8}) = \frac{32}{81}, \quad P(\hat{\xi}_{3,n}^{9/8} = 0) = \frac{17}{81} \tag{18}$$

と確率変数  $\hat{\xi}_{3,n}^{\sqrt{5}/2}$

$$P(\hat{\xi}_{3,n}^{\sqrt{5}/2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}) = \frac{2}{5}, \quad P(\hat{\xi}_{3,n}^{\sqrt{5}/2} = 0) = \frac{1}{5} \quad (19)$$

の2つを提案する。

最後に一般3点分布確率変数(17)を装着したオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域のグラフを図6に示す。

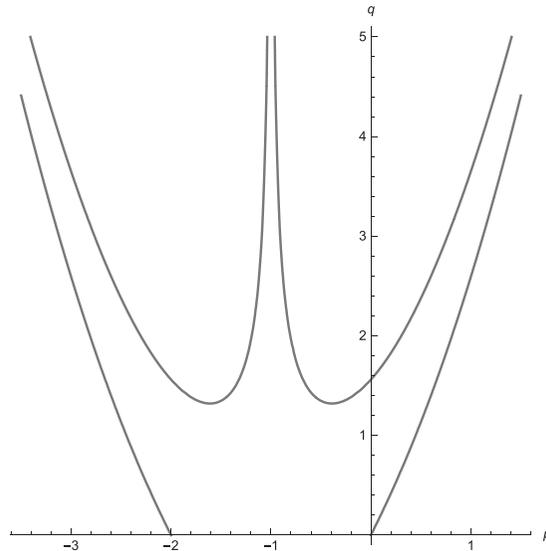


図6. 一般3点分布確率変数 ( $x = \frac{\sqrt{82}}{8}, z = \frac{82}{64}$ )

#### 4. まとめと今後の課題

本稿では、確率微分方程式の弱い近似で使用する3点分布確率変数に着目し、漸近安定性に優れた確率変数を提案した。漸近安定領域に含まれる矩形領域の高さが2点分布確率変数では1であったが、1.32まで広げることができた。提案した確率変数(18)よりも安定性に優れた確率変数を探することもできるが、確率の値はより複雑になる。コンピュータへの実装の容易さを考慮すると、確率変数(17)より劣るが、確率変数(18)や(19)も十分実用性が高いといえる。

今後は弱い2次法に着目し、本稿で考察した同様の手法を使って、矩形領域を最大にする4点分布確率変数の提案が課題である。また、今回提案した一般3点分布確率変数が陰的スキーム、たとえば $\theta$ ・丸山簡易スキームに対して、漸近安定領域がどのように変化するか、興味深い。本稿では矩形領域で探索したが、より実用的な尺度の開発が今後の課題

としてあげられる。

### 謝辞

本研究は令和元年度岐阜聖徳学園大学研究助成金を受けて行われました。

### 参考文献

- [ 1 ] Bryden, A. and Higham, D. J., 2003, “On the boundedness of asymptotic stability regions for the stochastic theta method”, BIT Numerical Mathematics, 43, pp 1-6
- [ 2 ] Burrage, K. and Tian, T., 2001, “The composite Euler method for stiff stochastic differential equations”, J. Comput. Appl. Math., 131, pp407-426
- [ 3 ] Higham, D. J., 2000, “Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method”, SIAM J. Numer. Anal., 38, pp 753-769
- [ 4 ] Kloeden, P. E., and Platen, E., 1992, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag
- [ 5 ] 三井斌友, 小藤俊幸, 齊藤善弘, 2004, 『微分方程式による計算科学入門』, 共立出版
- [ 6 ] Maruyama, G., 1955, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. Mat. Palermo, 4, pp48-90
- [ 7 ] Greiner, A., Strittmatter, W., and Honerkamp, J., 1987, “Numerical integration of stochastic differential equations”, J. Statist. Physics 51, pp 95-108
- [ 8 ] 齊藤善弘, 2012, 「オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性」, 応用数学分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2012 年度年会, pp93-96
- [ 9 ] 齊藤善弘, 2012, 「 $\theta$ ・丸山簡易スキームの数値的漸近安定性」, 応用数学分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, pp87-88
- [10] 齊藤善弘, 2015, 「確率微分方程式の弱い近似で使用される確率変数について」, 日本応用数理学会論文誌, 25, pp267-283