論　文

数学的活動としての"What if not?"についての研究（2）
— 中学校図形教材における事例をもとに —

鈴　木　明　裕
岐阜聖徳学園大学教育学部

Study on "What if not?" as a mathematical activity(2): Based on examples of junior high school's materials

Akihiro SUZUKI

Abstract

Issue 18 examined the hypothesis "What if not?" as a mathematical activity. The activity has three characteristics: a method for learning mathematical activities, contents of guidance, and a goal to be learned. Then, I propose that guidance on "What if not?" should be enhanced by teaching math and providing guidance.

This paper shows more concretely about teaching "What if not?" as a mathematical activity, based on a case study in a junior high school graphic design course.

The meaning of "What if not?" in this paper is considered as follows.

・As for the expression "If not A," depending on the situation, an activity is created.
・The basic "if" in "What if not?" is "if A, then B" expression of "if A".
・However, analysis is not limited to "if A, then B" expression of "if A", but also includes "What if?"

Key Words： What if not?, Mathematical activity, junior high school graphic area

Ⅰ．はじめに

本紀要18号「数学的活動としての〝What if not?〟」[1]において、数学的活動の３つの特性（学ぶための方法、指導の内容、学ぶ目標）をもった活動として、「数学的活動としての〝What if not?〟」があるという仮説を検証した。そして、「数学的活動としての〝What if not?〟」を意図的に指導することを提案した。

本稿では、「数学的活動としての〝What if not?〟」を意図的に指導することについて、中学校図形領域における事例をもとに、より具体的に示す。

尚、本稿における〝What if not?〟の意味は、次のように考えることとする。

○　「もし、〇〇でなかったら」という発問、発話によって、生まれる活動を考える。
○　〝What if not?〟の「if」の基本は、〝if A, then B〟形式の「if A」である。
○　しかし、〝if A,then B〟形式の「if A」に限定せず、「もし、〇〇でなかったら」から生まれる〝Whatif?〟の活動も含める。[2]

Ⅱ．中学校図形領域における「数学的活動としての〝What if not?〟」の事例

１．対頂角の性質－平行線の性質－三角形の内角と外角の和－多角形の内角と外角の和について

中学校２年生における図形領域の指導は、対頂角の性質から始まり、平行線の性質と条件、三角形の内角と外角の和、多角形の内角と外角の和という順に進められることが多い。しかし、生徒は次から次へと新しい図形の性質を学ぶが、そのつながりを意識されていることは少ない。ここにおいて、「数学的活動としての〝What if not?〟」を意図的に指導したならば、そのつながりは明確となるとと

もに、生徒自身が活動を進める形で学習を行うことができると考える。この一連の教材においてポイントとなるのは、直線と角である。そこで、「直線が１本の場合に考えられる角はないか」を確認させる。直線上に１点を取り、その点に角を認めるならば 180°という角度を得ることができる（図１）。これは、既習事項であり、今後の学習においても根拠として用いる重要な事項である。

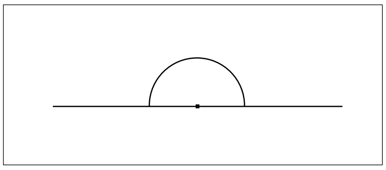


図１　直線が１本の場合の角

「もし、直線が１本でなかったら」という〝What if not?〟により、「直線が２本だったら」は自然と得られる。直線が２本の場合に考えられる角を確認する（図２）。

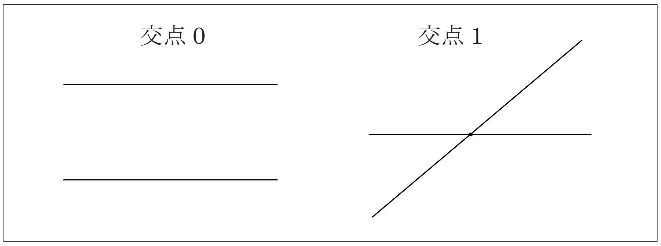


図２　直線が２本の場合の角

ここで注意したいのは、指導したい対頂角が現われる直線が１点で交わる場合だけでなく、直線が交わらず角を見いだせない場合についても取り扱い、確認することである。教科書は、非常に精選されており、このような無駄が省略されている（紙面の都合でそうせざるを得ない面もある）ことが多い。しかし、それは結果を知っているものが精選させたものである。活動の仕方を学ぶというならば、一見無駄なことを行うことも重要である。この教材でいえば、ここで直線が交わらない場合、つまり平行線になる場合を確認することは、次の平行線の性質へつながる重要なポイントである。この部分が、精選され、記されていないため生徒にはつながりがみえないものとなる。

さらに「もし、直線が〇本でなかったら」という〝What if not?〟を続ける。「直線が３本だったら、そこに表れる角について、どのような関係があるだろう」という問題が設定される（図３）。

ここにおいて指導したい対頂角の性質を示す図、平行線の性質を示す図、三角形の内角ならびに外角を示す図が出てくる。それは、１つの条件のもとで表れている図であり、つながりがあることが明確に

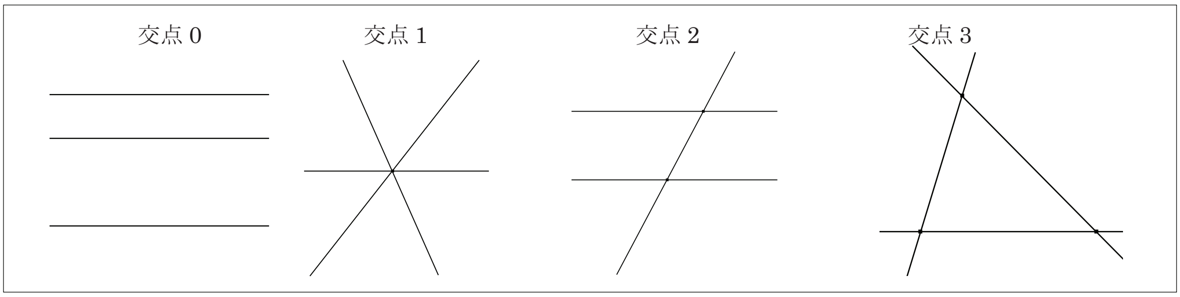


図３　直線が３本の場合の角

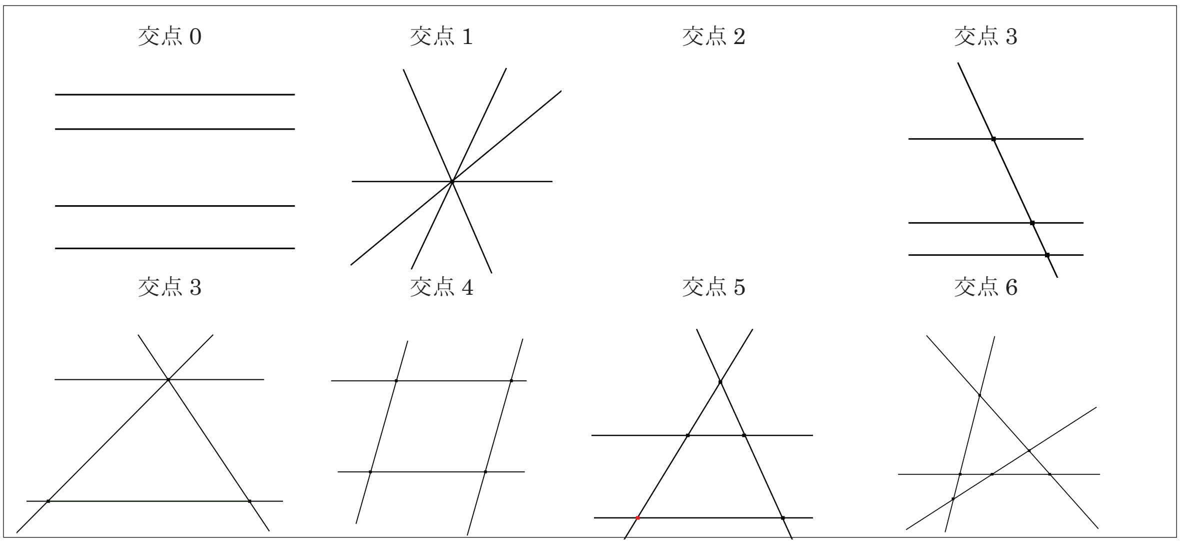


図４　直線が４本の場合の角

わかる。そうなれば、生徒は次から次へと関係のないもの、与えられたものを学んでいると感じなくなるだろう。学ぶための方法という特性をもった「数学的活動としての〝What if not?〟」である。

さらに〝What if not?〟を続け、「直線が４本だったら、５本だったら、…、そこに表れる角について、どのような関係があるだろう」と問い続けることができる（図４）。

ここで、多角形の内角の和と外角の和に関係する図も得られる。さらに楔形（次項で取り扱う）も得られるが、学習させたい事項と結びつきは薄れていく。〝What if not?〟によって、活動の仕方を学ぶ、学び方を学ぶという指導内容とするならば、意味ある活動である。しかし、問題の複雑さ、学習時間、すべての生徒が取り組むべき問題であるかを考えて判断することが必要となる。指導者としては、〝What if not?〟によって広げられたり、深められた活動を、どこで引き取るかも考慮しておく必要がある。そして、そのときには「結局は、先生の都合の良いところだけを授業で行った」と生徒が感じることがないようにし、これからの学習に余韻を残すようにしたい。

２．平行線内にある角と楔型の角について

中学校２年生における図形領域の指導において、平行線内にある角の問題[3)]（図５）、楔形の角の問題[4)]（図６）は、いろいろ形を変えながらも「定番」といえる問題である。生徒も多様な考え方をして、熱心に取り組む題材である。しかし、そこでの活動は、多様な考え方を引き出すことが主目的とされ、それぞれの問題を解くというものにとどまっている。そこで、〝What if not?〟を意図的に示すことで、活動が深まる事例を示したい。

平行な２直線 l, m の内部に，下の図のように点Ｘをとります。
$\angle x$ の大きさを a, b で表しなさい。

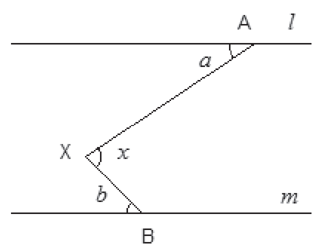


図５　平行線内にある角の問題

下の図で，$\angle x$ の大きさを a, b, c で表しなさい。

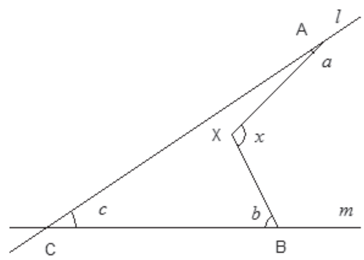


図６　楔形の角の問題

尚、平行線内にある角の問題の〝What if not?〟としては、「もし、点Ｘが平行線の内部になかったら」とか「もし、内部の点がＸの１点だけでなかったら」という追究もあるが、本稿では扱わない。

平行線内にある角の問題と楔形の角の問題の図を（図５、図６）並べてみれば、〝What if not?〟によって、$l/\!/m$ を $l \not\parallel m$ に条件変更した形であることは明らかである。

勿論ここにおいて、「もし、l と m の交点がＡ、Ｂに対してＸと同じ側でなかったら」という"What if not?"も存在するが、それは四角形の内角と外角の関係となるので本稿では扱わない。

平行線内にある角の問題、楔型の角の問題と別々の問題としていたときも、それぞれに多様な考え方、いろいろな補助線を用いた解決ができる。さらに「問題につながりがあるのならば、解決方法・補助線にもつながりがないか」と追究活動を行うことは「自然なこと」とまではいわないが、無理のない発展である。これも"What if not?"によって生み出される数学的活動である。

それぞれの場面での、生徒の思考、追究を考えると整ったものでなく、行ったり来たり、遠回りをしたりであろうが、ここでは、まず平行線内にある角の問題で用いた補助線が楔形の問題でも使えるかから考える。

《補助線①　点Ｘを通り $l/\!/m/\!/n$　となる直線》

授業では必ず扱われる補助線である。楔形でも、$l/\!/n$ か $m/\!/n$ のどちらか１本の直線でも解決できる。$l/\!/m$ となることで２本の直線が１つに重なったという見方もできる（図７）。

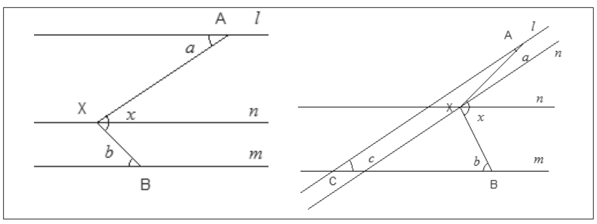


図７　補助線①

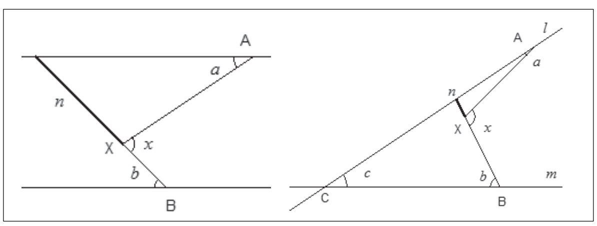


図８　補助線②

《補助線②　AX あるいは BX を延長した直線》

この補助線も平行線内にある角の問題，楔形の問題における定番の解決方法である（図８）。

《補助線③　X から l，m への垂線》

補助線①、②以外に、色々な垂線も考えることができる。ここでは、省略する。

次に、楔形の問題で用いた補助線から、平行線内にある角の問題でも使えるかを考える。

《補助線④　直線 AB》

楔形の問題では定番の補助線であり、個々の角の大きさは分かっていなくても、和が等しいものから等しいものを引くことで等しいことを説明する補助線として扱われる。一方で、平行線内にある角の問題では、まずは引いてみたい補助線であるが、この補助線を引いた子どもはなかなか解決に至らない補助線である[5]。この方法でも解決ができる生徒はその前に他の補助線を引く。ともに、新たにできた角を p、q とすると連立方程式を用いて解決できるが（図９）、平行線内の角の問題に関する授業では取り上げられることは少ない。楔形の問題と比較検討することで、まず引いてみた補助線が意味あるものであったことを確認できる。この確認は、数学を得意としない生徒にとっては、「自分の考えも悪くなかったんだ」と感じさせ、小さな自信につながるものであると考える。

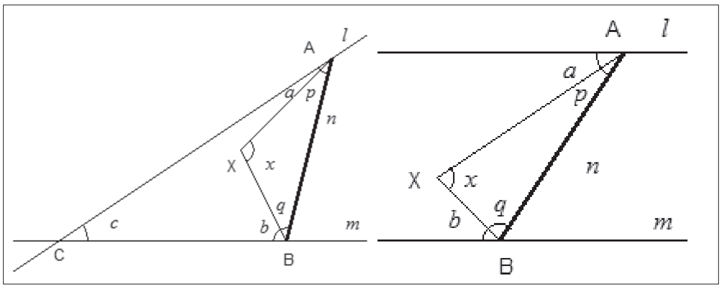


図９　補助線④

《補助線⑤　直線 CX》

楔形の問題では、定番の補助線で∠C を p、q と分割すると説明できる。この補助線 CX を平行線内の角の問題に適用しようとすると、点Ｘはあるが点Ｃがないため点Ｃを決める必要がある。点Ｃを直線 m 上にとり、∠XCB を p とすると、$x=(a-p)+(b+p)$ が得られ説明できる(図10)。これは、平行線内の角の問題だけを考えていては、なかなか得られない補助線であり、考えである。教科書にも参考書にも記載されていない新しい方法を、生徒の手で見いだせる場面、自分たちでつくったと感じられる場面である。

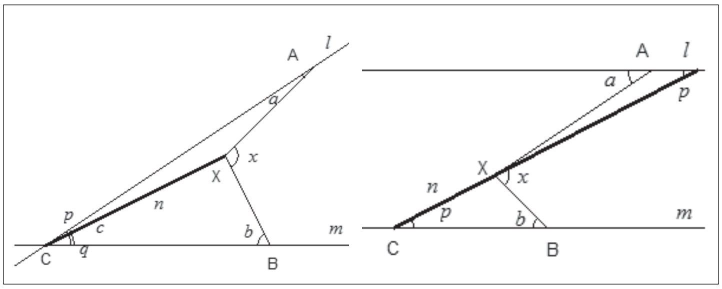


図 10　補助線⑤

《補助線⑥　点Ｘを通らず AX と交わる直線》

補助線⑤までは、それぞれの補助線の比較より得られる。ここでさらに、〝What if not?〟を考え「もし、⑤の補助線が点Ｘを通らなかったなら」と問うと、「点Ｘを通らず AX（あるいは BX）と交わる直線を補助線としたら説明できるか」という新たな問題を設定できる（図11）。

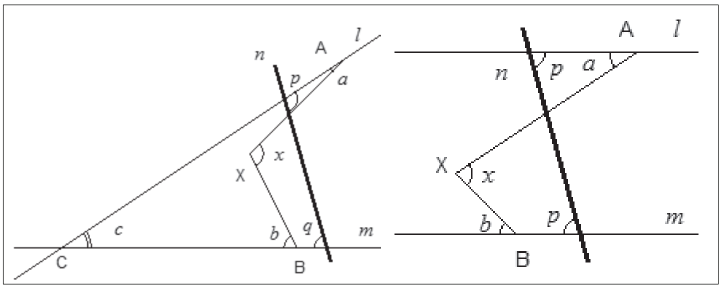


図 11　補助線⑥

図としては，色々な場合が考えられ，どこを p，q とするかによって違いが出てくるが，基本的には同じで形で説明できる。つまり，楔形の問題では $\begin{cases} q=p-c \\ (180-a-p)+x+(180-b)+q=360 \end{cases}$ により説明できる。平行線の内部の角については，$(180-a-p)+x+(180-b)+p=360$　となり説明できる。

ここまでくると、「平行線の内部の角の問題、楔形の角の問題では、どのような直線でも補助線として使うことができるのか」という新たな問いが生まれる。そして、「直線 l、m に平行で、点Xを通らない直線」だけは使うことができないという結論を得る。

数学的活動は、平成20年学習指導要領では「生徒（児童）が目的意識をもって主体的に取り組む数学（算数）にかかわりのある様々な営み」[6) と定義され、平成29年学習指導要領では「数学的活動とは、事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行することである。」[7) と定義された。そして、算数・数学の学習過程のイメージ（図12）[8) を用いて説明をしている。

ここで示した"What if not?"「もし、〇〇でなかったら」という発問、発話によって生まれる活動は、この数学的活動そのものであり、数学的活動を生み出すものである。

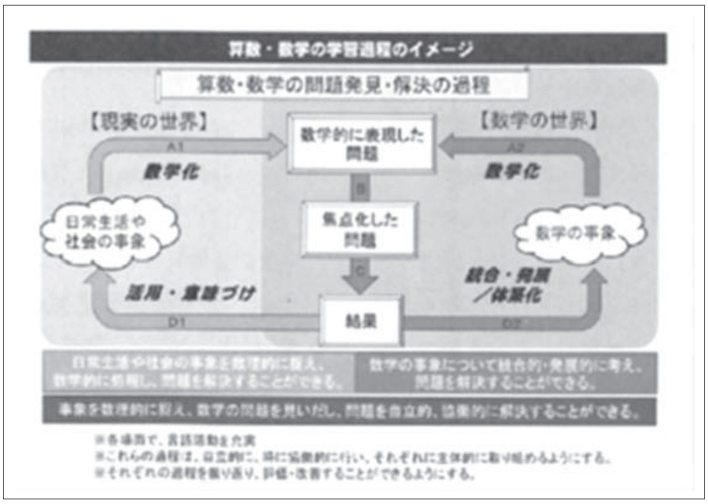


図 12　算数・数学の学習過程のイメージ

３．星形の先端にできる角の和について

平行線内にある角、楔型の角と並んで定番的な問題に星形の先端にできる角の和を求める問題がある（図13）[9)。

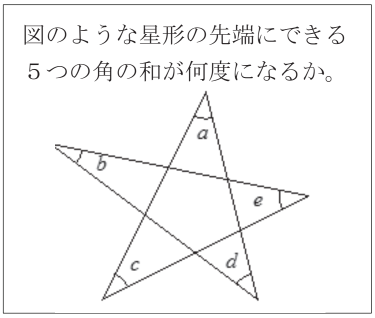


図 13　星形の先端にでき

この問題もいろいろな方法を用いて説明ができ、生徒も熱心に取り組む題材である。ここにおいて、「２．平行線内にある角と楔型の角について」で示した数学的活動を経験した生徒ならば、

- 星形と多角形とを関連付けて考え、凸多角形はｎ個の頂点を順々に隣と結んだ図形だ。
- 星形は頂点を１つ飛ばしに結んだ図形と考えられる。
- 平行線内にある角と楔型の角のときと同じように、ｎ角形の内角の和を求めるときに用いた補助線が、星形ｎ角形の先端にできる角の和に使えないだろうか。

と追究活動・数学的活動を行うことを期待したい。

ｎ角形の内角の和を求める式を考えたとき、図形の内部の点０から各頂点と結ぶ補助線を引き、ｎ個の三角形を作り、180°×ｎとし、余分に足している点０のまわりの角の和 360°を引くことで、180°×（ｎ－２）という式を得た。

- 同じように星形の内部に点０をとり、各頂点と結ぶ補助線を引くとｎ個の三角形ができる
- 同じように、180°×ｎとすることができる
- 同じように、余分に足している点０の周りの角の和は 720°
- だから、180°×（ｎ－４）という式を得られる（図14）

つまり、平行線内にある角と楔型の角の問題を考えることで、生徒は活動の仕方を学ぶことができているのではないだろうか。これは、数学的活動の３つの特性のうちの「指導の内容」「学ぶ目標」を学んでいると考える。

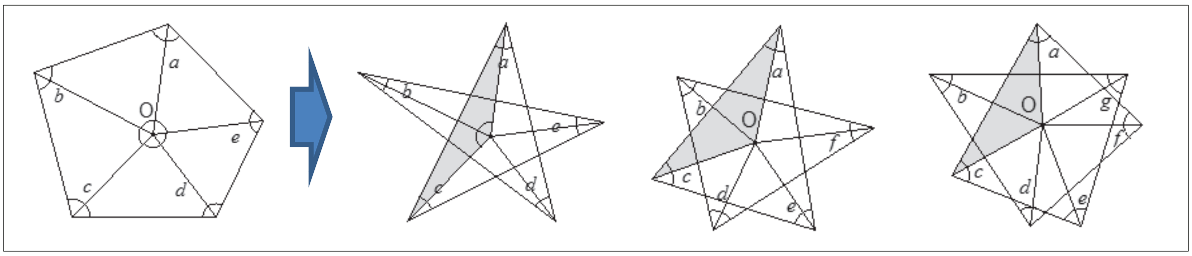


図 14　星形の先端にできる角の和

4．四角形の包摂関係について

学習の振り返りとして、「学習 Map」の作成を提案している[10]。学習 Map は筆者による造語である。学習 Map を作成することで、学習した事項を振り返り、つなぐ作業を単元のまとめの授業やレポート課題等での活用をしようというものである。

図15は、生徒が「四角形の成長図」と題して作成した学習 Map である。ここにおいて、生徒は明確には〝What if not?〟を意識してはいない。しかし、矢印の内容をみていくと、それは条件の変更によってなされていることが分かる。つまり、〝What if not?〟によって学習が整理されていっている。

〝What if not?〟は、既習を振り返り、統合的に捉える場面において、有効に働く数学的活動であり、数学的な見方・考え方である。筆者の提案は、このような「数学的活動としての〝What if not?〟」を意図的に指導しようということである。

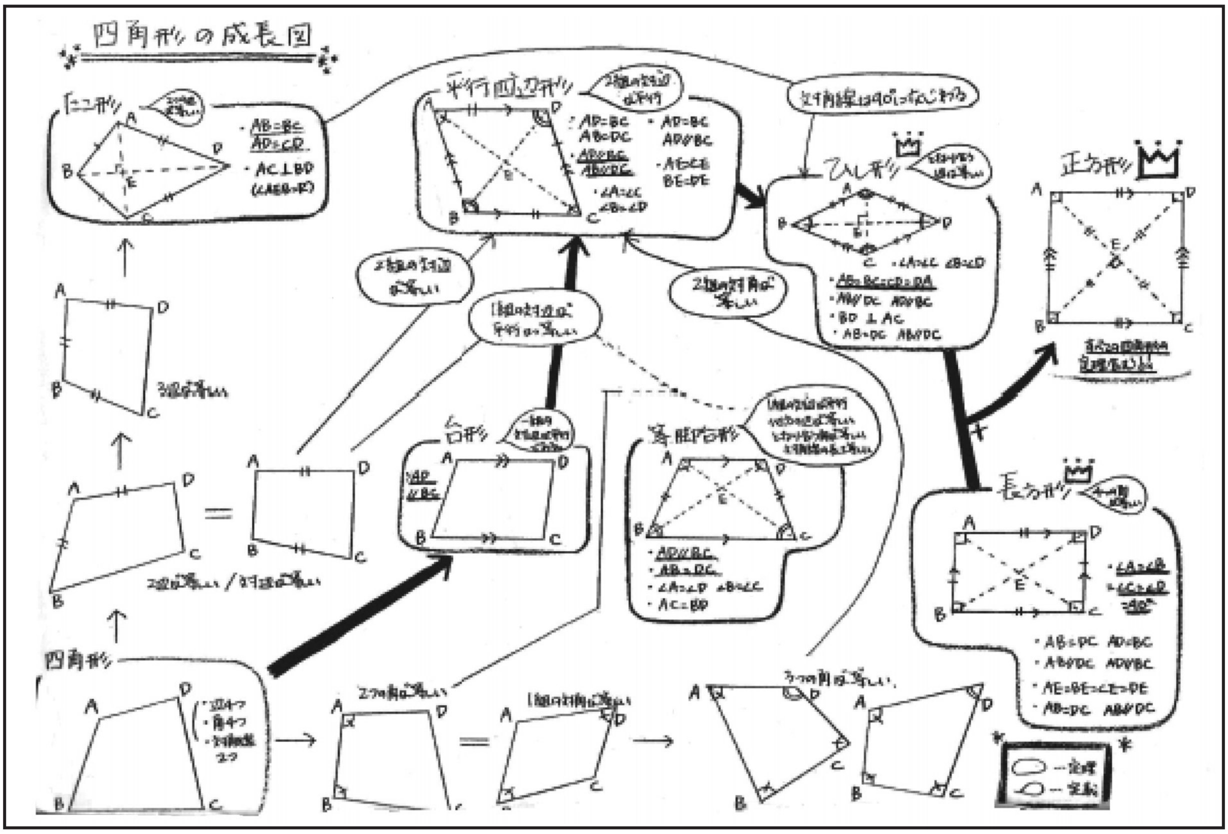


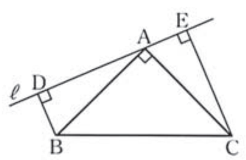
図 15　生徒が作成した学習 Map

5．「図のように」で与えられる情報について

中学校の図形領域の問題では、「図のように」で多くの情報を提供することがしばしばある。この「図のように」で示された情報を〝if A, then B〟形式で表わし「if A」を明らかにすることで、条件が明確になり、〝What if not?〟から多くの数学的活動が生み出される。

図16で示される教科書の問題[11]は、「右の図のように」によって、直線 l の位置が決められている。それを言語で表現すると、「直線 l は、点Aを通るが、直角二等辺三角形とは交わらない位置にあるとき」という「if A」が明らかになる。そして〝What if not?〟から、「直線 l は、点Aを通り、直角二等辺三角形と交わる位置にあるとき」とすれば、新たな図・場面（図17）を得る。

右の図のように，$\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC と点 A を通る直線 ℓ があります。
点 B，C から，直線 ℓ に，それぞれ，垂線 BD，CE をひいたときについて考えます。



1. △ABD ≡ △CAE であることを証明しましょう。

2. BD＋CE＝DE であることを証明しましょう。

図 16　「図のように」で示す情報

そして、同様の追究をするならば、実は証明は同じであるという発見を得ることができる。それは、証明のよさの感得へとつながる。

教科書もこのように展開されているが、他の場面でも使える数学的な見方・考え方、「数学的活動としての〝What if not?〞」を意図的に指導したい。問として与えられるものではなく、自ら動きはじめる活動の仕方を学ばせたい。

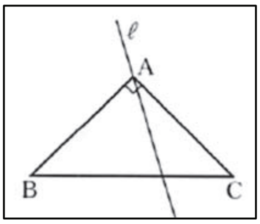


図 17　新たな図

Ⅲ．中学校の図形領域以外の領域における「数学的活動としての〝What if not?〞」について

H29中学校学習指導要領では、中学校数学の領域は、A数と式、B図形、C関数、Dデータの活用がある。本稿では、図形領域の教材を扱って「数学的活動としての〝What if not?〞」を考えた。他領域についても、一言示しておく。

数と式、関数の領域は、学年進行が〝What if not?〞で示されているといっても過言ではない。方程式は、１年時に一元一次方程式を、２年時では連立二元一次方程式、３年時では一元二次方程式を学習する。これは、一年時の一元一次方程式をもとに考え「もし、文字が１種類だけでなかったら」、「もし、文字の次数が１次でなかったら」としてできた方程式である。また、学年内においても、「方程式の解き方」として取り上げられる方程式は、図18のように進行していく[12]。これは、$ax=b$　の方程式を基本とし、変化していってことが目に見える。〝What if not?〞を用いた学習 Map の作成を待つまでもない。

例１　$3x+20=50$
例２　$8x=5x-21$
例題１　$7x-2=6+3x$
例題２　$7(x-5)=9x+1$
例題３　$\frac{x+1}{2}=\frac{1}{5}x+2$

図 18　１年方程式の例・例題

関数についても、１年時で扱う比例・反比例は、小学校での学習に対して、「もし、xのとる値が正の数だけでなかったら」「もし、xの係数が正の数だけでなかったら」と〝What if not?〞によって中学校で学習した負の数の範囲まで拡張したと意図的に指導すれば、小学校での学習と中学校での学習の違いが明確になり、学習の深化が期待できる。

データの活用領域については、現行の資料の活用領域からの変更があり、新しい教科書を見て判断するべきであろう。だが、中学校では扱わないが偏差値がつくられていく過程は、よりよいものを求めての〝What if not?〞であるといえよう。データを目的に合わせて、見やすく表すにはどうしたらよいかという視点と〝What if not?〞からの視点を組み合わせて考えることには価値があると推測する。今後の課題である。

ここで示したことは、本稿でなぜ図形領域を取り上げたかにつながる。数と式、関数領域は、十分指導されているかは別として、その学習の進行自体が〝What if not?〞をもとに構成されており、生徒にもみえやすいものである。一方図形領域は、Ⅱで示したように、〝What if not?〞の視点を意図的にあてないと見えないものが多い。しかし一方では〝What if not?〞によって活動が広げられ、生徒自身で活動を深め、いろいろな数学的活動を経験することができ、新たの知見を得られることも期待できる。数と式、関数領域は道筋が明確で、脇道へ逸れて追究しようとすると、問題設定はできるがそのために必要な準備が整っていないということも多い。例えば、一元一次方程式の〝What if not?〞によって、「$ax^2=b$ の方程式の解はどうなるだろう」という問題設定は中学１年でも可能であるが、追究となると平方根、因数分解等の学習が準備として必要になる。

このようなことから、本稿では「数学的活動としての〝What if not?〞」を意図的に指導する事例として図形領域の教材を取り上げた。

Ⅳ．おわりに

本稿は、数学的活動として〝What if not?〞を意図的に指導することについて、中学校図形領域における事例をもとに、より具体的に示すことを意図したものである。幾つかの事例をもとに具体的に示すことで、「数学的活動としての〝What if not?〞」について意味と意義、ならびに意図的に指導することの意味と意義を示した。

20年程前に、〝What if not?〞に関連する内容である〝If A, then B〞の形でまとめることについて「少

なくとも教師ががこの視点で教科書を読むとみえてくるものが多くある」[13] という提案をした。そのとき研究会に参加していた20代の数学教師から「私には、何もみえてこないのですが､､､」という質問を受けた。これは、目の前にあっても、みえているはずのものであっても、意図してみなければみえないということである。筆者が、「数学的活動としての〝What if not?〟」を意図的に指導する必要性を主張する原体験でもある。

一方、恩師　柴田録治　先生（岐阜聖徳学園大学名誉教授、愛知教育大学名誉教授）から前稿「数学的活動としての〝What if not?〟」について、

「より深い理解をすること、させること」とかかわって。理解があって、より深い理解を、すなわち、理解を深めるのにどうしたらよろしいかの努力です。既習や既存で身についているものを深めるには、どうすればよいか。「われ思うゆえにわれあり」で、是と承知しているものを否定し是であることを確認していく手法です。

[If, then]形式で表せば、If not　となるのでしょうね。

これは別の形でいえば、テーゼ、アンチテーゼ、ジンテーゼ、正・反・合です。

というご指摘をいただいた。

これは、「数学的活動としての〝What if not?〟」が、弁証法といった思考の方法へとつながっていくとの示唆であると考える。このような「数学的活動としての〝What if not?〟」の広がり、役割については、今後の課題としたい。

注・文献

1）鈴木明裕（2019）:「数学的活動としての〝What if not?〟」，岐阜聖徳学園大学教育実践科学研究センター紀要18号，岐阜，151-158.

2）同上，153.

3）例えば、中学校検定教科書（2016）:「未来へひろがる数学２」，新興出版社啓林館，大阪，117.

4）例えば、同上，101.

5）鈴木明裕（2012）:「「事実・手続き」「根拠」「着想」の３つの柱をもとにして考えることの提案」，日本数学教育学会誌第94巻第７号，東京，19-22.
では、着想という視点からこの補助線について示している。

6）・文部科学省（2008）:「小学校学習指導要領解説数学編」，東洋館出版，東京，18.
・文部科学省（2008）:「中学校学習指導要領解説数学編」，教育出版，東京，15.

7）・文部科学省（2017）:「中学校学習指導要領解説数学編」，日本文教，大阪，23.
・文部科学省（2017）:「小学校学習指導要領解説算数編」，日本文教，大阪，23.

8）同上、中学校は23ページ、小学校は８ページ。

9）例えば，同３），114.

10）鈴木明裕（2016）:「中学校数学科言語活動プラン＆評価問題」，明治図書，東京，114.

11）前掲３），146.

12）中学校検定教科書（2016）:「未来へひろがる数学１」，新興出版社啓林館，大阪，86-89.

13）鈴木明裕（2002）:「数学大好き２　教科書を使って分かる・できる楽しい授業づくり」，明治図書，東京，100-101.