Review of Economics and Information Studies Vol.14 No.3•4 March 2014

確率微分方程式系に対する改良ホイン法

齊　藤　善　弘

概　要

確率微分方程式の数値解法について研究され、その形態に応じて種々のスキームが提案されている。確率微分方程式系にホイン法を適用した場合、強い収束次数は１／２次しか達成されないことが知られている。本稿では、ホイン法に改良を加え、実質的に１次の解法を提案する。

１．はじめに

多次元ノイズをもつ d 次元自励系のストラトノヴィチ型確率微分方程式に対する確率初期値問題（SIVP）

$$\mathrm{d}X(t) = f(X)\mathrm{d}t + G(X)\circ \mathrm{d}W(t), \quad t\in[t_0,T], \quad X(t_0)=X_0 \qquad (1)$$

を考える。ここで、$f=\{f^k\}$ は d 次元ベクトル値関数、$G=g^j=\{g^{k,j}\}$ は $d\times m$ 行列値関数、$W=\{W^j\}$ は m 次元ウィナー過程、$[W^1(t),W^2(t),\cdots,W^m(t)]^t$ である。確率初期値問題（１）を成分で書き表すとつぎのようになる。

$$\begin{cases} \mathrm{d}X^k(t) = f^k(X)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} g^{k,j}(X)\circ \mathrm{d}W^j(t), \quad t\in[t_0,T], \\ X^k(t_0)=X_0^k \end{cases} \qquad (2)$$

ストラトノヴィチ型確率初期値問題に対する最も基本的なスキームは、ミルシュテイン・スキームで、SIVP（２）の $t=t_n=t_0+nh(h>0)$ における解 $X(t_n)$ に対する近似解を X_n とすると、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} X_{n+1}^k = X_n^k + f^k(X_n)h + \sum_{j=1}^{m} g^{k,j}(X_n)\xi_{j,n}\sqrt{h} \\ + \sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left[L^{j_1}g^{k,j_2}\right](X_n)\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{t_n}^{s}\circ \mathrm{d}W^{j_1}(r)\circ \mathrm{d}W^{j_2}(s) \end{aligned} \qquad (3)$$

ここで、L^j は演算子

$$L^j = \sum_{k=1}^{d} g^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

を、$h = t_{n+1} - t_n$ はステップ幅をそれぞれ意味し、各 $\xi_{j,n}$ は標準正規乱数、すなわち平均０、分散１の独立な正規乱数 $N(0;1)$ である。また、$\xi_{j,n}\sqrt{h}$ でもってウィナー過程の増分 $\Delta W_n^j = W^j(t_{n+1}) - W^j(t_n)$ を模擬する［６］。ミルシュテイン・スキームの強い収束次数は１であることが知られている［６］。

強い収束次数の定義をつぎに述べる。

定義１　近似解 X_n が強い収束次数 p をもつとは、ある正のステップ幅の限界 h_0 と有限な正の定数 K が存在して、$h \le h_0$ を満たす任意の正のステップ幅 h について

$$\mathbb{E}\left[\left|X(T) - X_N\right|\right] \le K h^p$$

が成り立つことである［６］。ここで、$\mathbb{E}[\cdot]$ は期待値を、$|\cdot|$ はユークリッド・ノルムを表し、$h = (T - t_0)/N$ を満たす。

さて、ミルシュテイン・スキームに現れる確率二重積分

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s} \circ \mathrm{d}W^{j_1}(r) \circ \mathrm{d}W^{j_2}(s)$$

は、$j_1, j_2 = 1, \cdots, m,$ および $k = 1, \cdots, d$ に対して、つぎの条件

$$L^{j_1} g^{k,j_2} = L^{j_2} g^{k,j_1} \tag{4}$$

を満たすとき、

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s} \circ \mathrm{d}W^{j_1}(r) \circ \mathrm{d}W^{j_2}(s) = \frac{1}{2} \xi_{j_1,n} \xi_{j_2,n} h \tag{5}$$

と計算できる。よって、条件（４）を満たす場合のミルシュテイン・スキームは

$$X_{n+1}^k = X_n^k + f^k(X_n)h + \sum_{j=1}^{m} g^{k,j}(X_n)\xi_{j,n}\sqrt{h} + \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left[L^{j_1} g^{k,j_2}\right](X_n)\xi_{j_1,n}\xi_{j_2,n} h \tag{6}$$

と記述できる。条件式（４）は可換条件（commutativity condition）と呼ばれ、可換条件を満たす SIVP を可換ノイズをもつ SIVP、条件を満たさない場合を非可換ノイズをもつ SIVP と呼ぶことにする。

非可換ノイズをもつ SIVP の厳密な１次法は存在しないが、近似的に１次を達成するスキームが提案されており［６］、この場合、確率二重積分は

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s} \circ \mathrm{d}W^{j_1}(r) \circ \mathrm{d}W^{j_2}(s) = \frac{1}{2}\xi_{j_1,n}\xi_{j_2,n}\, h + A_{j_1,j_2}(h) \tag{7}$$

になる。ここで、

$$A_{j_1,j_2}(h) = \frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left\{\chi_{j_1,n,k}\left(\zeta_{j_2,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_2,n}\right) - \chi_{j_2,n,k}\left(\zeta_{j_1,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_1,n}\right)\right\} \tag{8}$$

である。スキーム（3）および式（7）、（8）に現れる $\xi_{j_1,n}$、$\xi_{j_2,n}$、$\chi_{j_1,n,k}$、$\chi_{j_2,n,k}$、$\zeta_{j_1,n,k}$、$\zeta_{j_2,n,k}$ は互いに独立な標準正規乱数 $N(0\,;1)$ である。非可換ノイズもつ SIVP に対して、ミルシュテイン・スキームを実装する場合は、$A_{j_1,j_2}(h)$ をつぎの $A^p_{j_1,j_2}(h)$ で近似する［6］。

$$A^p_{j_1,j_2}(h) = \frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left\{\chi_{j_1,n,k}\left(\zeta_{j_2,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_2,n}\right) - \chi_{j_2,n,k}\left(\zeta_{j_1,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_1,n}\right)\right\} \tag{9}$$

したがって、非可換ノイズをもつ SIVP（2）に対するミルシュテイン・スキームは

$$\begin{aligned} X^k_{n+1} &= X^k_n + f^k(X_n)h + \sum_{j=1}^{m} g^{k,j}(X_n)\xi_{j,n}\sqrt{h} \\ &\quad + \sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left[L^{j_1} g^{k,j_2}\right](X_n)\left(\frac{1}{2}\xi_{j_1,n}\,\xi_{j_2,n}\,h + A_{j_1,j_2}(h)\right) \end{aligned} \tag{10}$$

となり、実質的に１次のミルシュテイン・スキームは

$$\begin{aligned} X^k_{n+1} &= X^k_n + f^k(X_n)h + \sum_{j=1}^{m} g^{k,j}(X_n)\xi_{j,n}\sqrt{h} \\ &\quad + \sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left[L^{j_1} g^{k,j_2}\right](X_n)\left(\frac{1}{2}\xi_{j_1,n}\,\xi_{j_2,n}\,h + A^p_{j_1,j_2}(h)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

となる。スキーム（10）および（11）に現れる $A_{j_1,j_2}(h)$、$A^p_{j_1,j_2}(h)$ はそれぞれ、式（8）、（9）である。

今度は、ホイン法に目を向けよう。SIVP（2）に対してホイン法はつぎの形式をもつ。

$$X^k_{n+1} = X^k_n + \frac{1}{2}\left[f^k(H_1) + f^k(H_2)\right]h + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g^{k,j}(H_1) + g^{k,j}(H_2)\right]\xi_{j,n}\sqrt{h} \tag{12}$$

ここで

$$H_1^k = X_n^k,$$

$$H_2^k = X_n^k + f^k(H_1)h + \sum_{l=1}^{m} g^{k,l}(H_1)\xi_{l,n}\sqrt{h}$$

ホイン法（12）による近似解X_{n+1}^kに対して$x = X_n$のまわりでテイラー展開すると、式（６）の項まで一致することがわかる。これはリュメリンが与えた結果と一致する［８］。つまり、可換ノイズをもつ SIVP に対してホイン法は１次を達成することができるが、非可換ノイズの場合は、ホイン法は１次を達成することができない。齊藤・三井は論文［12］で、スカラーの SIVP に対して３段ホイン法では１次しか達成できないが、補正項を加えることで 1.5 次の方法を提案し、これを３段改良ホイン・スキームと名付けた。本稿では、非可換ノイズをもつ SIVP に対し、ホイン法（12）に補正項を加えることで実質的に１次の方法を提案する。

２．改良ホイン法

第１節で紹介したホイン法（12）はリュメリン型のルンゲ・クッタ法である［８,７］。ところが、リュメリン型では確率微分方程式系に対して、特殊な場合、つまり可換条件（４）を満たす場合を除いて､強い１次を達成することができないことが知られている｡近年､Rößler は確率微分方程式系に対して強い１次のルンゲ・クッタ法の一クラスを提案した。ストラトノヴィチ型 SIVP（２）に対して、Rößler が提案した強い１次のルンゲ・クッタ法の１つである SRS1 スキームはつぎで与えられる。

$$X_{n+1}^k = X_n^k + f^k(X_n)h + \sum_{j=1}^{m} g^{k,j}(X_n)\xi_{j,n}\sqrt{h} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g^{k,j}(K_1^{(j)}) - g^{k,j}(K_2^{(j)})\right]\sqrt{h},$$

$$K_1^{(j),k} = X_n^k + \sum_{l=1}^{m} g^{k,l}(X_n)\frac{J_{(l,j)}}{\sqrt{h}}, \tag{13}$$

$$K_2^{(j),k} = X_n^k - \sum_{l=1}^{m} g^{k,l}(X_n)\frac{J_{(l,j)}}{\sqrt{h}}$$

ここで

$$J_{(j_1,j_2)} = \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{t_n}^{s} \circ \mathrm{d}W^{j_1}(r) \circ \mathrm{d}W^{j_2}(s) = \frac{1}{2}\xi_{j_1,n}\xi_{j_2,n}h + A_{j_1,j_2}(h),$$

$$A_{j_1,j_2}(h)=\frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left\{\chi_{j_1,n,k}\left(\zeta_{j_2,n,k}+\sqrt{2}\xi_{j_2,n}\right)-\chi_{j_2,n,k}\left(\zeta_{j_1,n,k}+\sqrt{2}\xi_{j_1,n}\right)\right\}$$

強い１次の解法であるミルシュテイン・スキーム（10）とホイン法（12）を比較すれば、確率ホイン法（12）には、$A_{j_1,j_2}(h)$ の項、すなわち、式（８）

$$A_{j_1,j_2}(h)=\frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left\{\chi_{j_1,n,k}\left(\zeta_{j_2,n,k}+\sqrt{2}\xi_{j_2,n}\right)-\chi_{j_2,n,k}\left(\zeta_{j_1,n,k}+\sqrt{2}\xi_{j_1,n}\right)\right\}$$

が不足していることがわかる。また、$A_{j_1,j_2}(h)$ の係数は Rößler が提案した SRS1 スキーム（13）の形式でつくることができる。よって、改良ホイン法をつぎのように提案できる。

$$X_{n+1}^{k}=X_{n}^{k}+\frac{1}{2}\left[f^{k}(H_1)+f^{k}(H_2)\right]h+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g^{k,j}(H_1)+g^{k,j}(H_2)\right]\xi_{j,n}\sqrt{h}$$

（14）

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g^{k,j}(K_1^{(j)})-g^{k,j}(K_2^{(j)})\right]\sqrt{h}$$

ここで

$$H_1^k=X_n^k,$$

$$H_2^k=X_n^k+f^k(H_1)h+\sum_{l=1}^{m}g^{k,l}(H_1)\xi_{l,n}\sqrt{h},$$

$$K_1^{(j),k}=X_n^k+\sum_{l=1}^{m}g^{k,l}(H_1)\frac{A_{l,j}(h)}{\sqrt{h}},$$

$$K_2^{(j),k}=X_n^k-\sum_{l=1}^{m}g^{k,l}(H_1)\frac{A_{l,j}(h)}{\sqrt{h}}$$

そして、実装用の実質的に強い１次の改良ホイン・スキームはつぎのようになる。

$$X_{n+1}^{k}=X_{n}^{k}+\frac{1}{2}\left[f^{k}(H_1)+f^{k}(H_2)\right]h+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g^{k,j}(H_1)+g^{k,j}(H_2)\right]\xi_{j,n}\sqrt{h}$$

（15）

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[g^{k,j}(K_1^{(j)})-g^{k,j}(K_2^{(j)})\right]\sqrt{h}$$

ここで

$$H_1^k = X_n^k,$$

$$H_2^k = X_n^k + f^k(H_1)h + \sum_{l=1}^{m} g^{k,l}(H_1)\,\xi_{l,n}\sqrt{h},$$

$$K_1^{(j),k} = X_n^k + \sum_{l=1}^{m} g^{k,l}(H_1)\frac{A_{l,j}^p(h)}{\sqrt{h}},$$

$$K_2^{(j),k} = X_n^k - \sum_{l=1}^{m} g^{k,l}(H_1)\frac{A_{l,j}^p(h)}{\sqrt{h}}$$

改良ホイン法（14）およびスキーム（15）に現れる$A_{j_1,j_2}(h)$、$A_{j_1,j_2}^p(h)$はそれぞれ式（８）、（９）で

$$A_{j_1,j_2}(h) = \frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left\{\chi_{j_1,n,k}\left(\zeta_{j_2,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_2,n}\right) - \chi_{j_2,n,k}\left(\zeta_{j_1,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_1,n}\right)\right\},$$

$$A_{j_1,j_2}^p(h) = \frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left\{\chi_{j_1,n,k}\left(\zeta_{j_2,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_2,n}\right) - \chi_{j_2,n,k}\left(\zeta_{j_1,n,k} + \sqrt{2}\xi_{j_1,n}\right)\right\}$$

以上をまとめると、ホイン法に関するつぎの定理を得る。

定理１　SIVP（２）において、関数$f^k, g^{k,j}$は４回連続偏微分可能とする。このとき

（ａ）非可換の SIVP、つまり可換条件（４）を満たさない場合、強い収束次数１の解法は改良ホイン法（14）である。

（ｂ）可換の SIVP、つまり可換条件（４）を満たす場合、強い収束次数１の解法はホイン法（12）である。

３．まとめと今後の課題

本稿では、非可換ノイズをもつ確率微分方程式系に対して、従来のホイン法に補正項を加えることにより、実質的に強い１次の解法を提案し、改良ホイン法と名付けた。だが、ミルシュテイン・スキームや Rößler の SRS1 スキームとの数値実験による比較はできなかった。

今後の課題として、まず改良ホイン法と他の１次の解法による数値結果の比較があげられる。そして、改良ホイン法に対して数値的安定性（平均二乗安定性、漸近安定性）について調べることである［４,５,11］。一つの方向性として、非可換ノイズをもつテスト方程式系に対する安定性の研究があるが［１,２,３］、Rößler のスキームより安定性に優れたスキームの

探索が課題である。また、本稿で述べたのと同様の手法で強い３／２次、２次のスキームの開発があげられる。しかし、Rößler の論文［９,10］を見る限り、より一層の工夫が必要となろう。

参考文献

［１］Buckwar,E., Kelly, C., 2010, “Towards a systematic linear stability analysis of numerical methods for systems of stochastic differential equations”, SIAM J. Numer. Anal. **48**, pp 298-321

［２］Buckwar, E., Sickenberger, T., 2011, “A comparative linear mean-square stability analysis of Maruyama and Milstein-type methods”, Math. Comput. Simul. **81**, pp 1110-1127

［３］Buckwar, E., Sickenberger, T., 2012, “A structural analysis of asymptotic mean-square stability for multi-dimensional linear stochastic differential systems”, Appl. Numer. Math., **62**, pp 842-859

［４］Higham, D. J., 2000, “Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method”, SIAM J. Numer. Anal., **38**, pp 753-769

［５］Higham, D. J., 2000, “A-stability and stochastic mean-square stability”, BIT, **40**, pp 404-409

［６］Kloeden, P.E., and Platen, E., 1992, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag

［７］三井斌友、小藤俊幸、齊藤善弘、2004、『微分方程式による計算科学入門』、共立出版、東京

［８］Rümelin, W., 1982, “Numerical treatment of stochastic differential equations”, SIAM J. Numer. Aal., **19**, pp 604–613

［９］Rößler, A., 2010, “Runge-Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations”, SIAM J. Numer. Anal., **48**, pp 922–952

［10］Rößler, A., 2010, “Strong and weak approximation methods for stochastic differential equations –Some recent developments”, in Recent developments in applied probability and statistics, Springer-Verlag, pp 127–153

［11］齊藤善弘、2011、「確率微分方程式に対する修正ホイン法」、日本応用数理学会論文誌, 21, pp 323-333

［12］齊藤善弘、三井斌友、1992、「確率微分方程式の離散近似」、日本応用数理学会論文誌、２、pp 1-16