実践研究

小学校算数科の教材論
― タイルを用いた指導から ―

福　田　茂　隆
岐阜聖徳学園大学教育学部

Teaching materials in elementary school mathematics:
Teaching mathematics by utilizing tiles

Shigetaka FUKUDA

キーワード：五二進法と銭勘定　異分母分数の加法・減法　正負の数の加減乗除

Ⅰ．はじめに

数構造を兼ね備えた半具体物であるタイル（数のシェーマ）を用いた小学校算数科の指導法の長所を示す３つの実践例（第 Ⅱ 章、第 Ⅲ 章、第 Ⅳ 章）を報告する。第 Ⅱ 章（繰り上がり繰り下がり）・第 Ⅲ 章（異分母分数の通分）は小学校算数科の内容であるが、第 Ⅳ 章は中学校数学科の内容を小学校との繋がりで考えようというものである。実践後の考察であるが、対象者が 10 名前後にとどまるので、数値データではなく聴き取り及び反応により形成された心証に基づく。

拙稿では、故遠山啓氏を中心として創始されたスクールのランゲージで、よく知られているものは説明抜きで使用する。

Ⅱ．五・二進法と繰り上がり繰り下がり

計算とは何であるか。小学校で学習する数である整数・小数・分数それぞれに標準形がある。整数・小数は十進位取り記数法による表記、分数は既約分数表記が、標準形である。整数・小数・分数の２項演算（足し算、引き算、掛け算、…）の計算とは、答えを標準形で表すことである。

整数の足し算・引き算において、十進法の 10 の素因数が 2 と 5 であるので、「五・二進法」的発想が子どもから出てくる事があるのは自然ではある。五・二進法で繰り上がり・繰り下がりを指導する方法が、例えば、むぎ書房の算数テキスト「わかる　さんすう１」[1] に載っている（「一」バラ、「十」短冊の他に、補助的に「五」短冊を用いる）。そこでは、型分けでの指導が出ているが、子どもの主体性を重視する学び（Active Learning）の昨今においては、そのままでは授業で使えない。

実は五・二進法の型分けは、大人にとっては、五円玉を許したゼニ勘定と捉えれば日頃から無意識に行っている事であり、（一般型からゼロを孕む特殊型に退化させる理屈も含め）至極自明である事に気付く。授業者は見通しを持って、「五」が２つで「十」になるというポイントだけ押さえて、子どもに任せてしまうこともできる。

下記の１．２．３．は、「わかる　さんすう１」[2] での繰り上がり・繰り下がりの型分けの内容を（一円玉・五円玉・十円玉でのゼニ勘定の観点で）整理したものである。「１」を一円玉、「五」を五円玉、「拾」を十円玉として読んで頂きたい（図１と図２を参照すれば理解の助けになる）。以下の２．３．は、

まさに日頃行っている銭勘定そのものである。

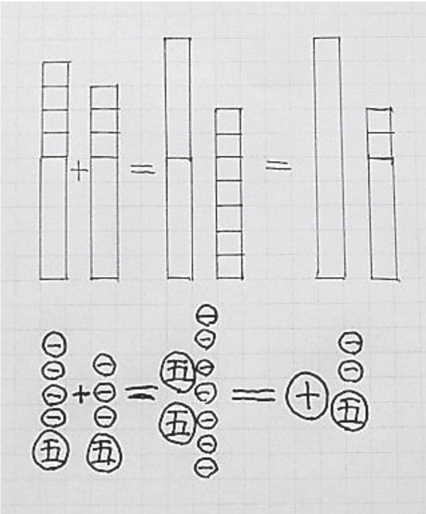

図１　９＋８を、タイル図と、日頃の銭勘定で行った図

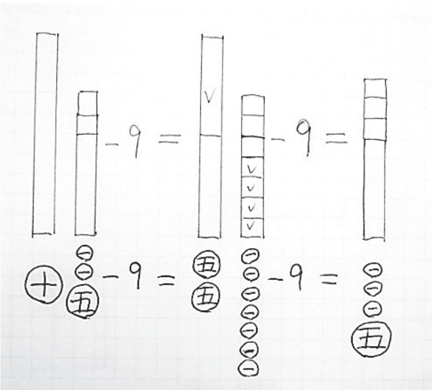

図２　17－９を、タイル図と、日頃の銭勘定で行った図

１．準備

拾＝五＋五＝五＋１＋１＋１＋１＋１＝１＋１＋１＋１＋１＋１＋１＋１＋１＋１，

６＝五＋１，　７＝五＋２，　８＝五＋３，　９＝五＋４

２．繰り上がりのある足し算

（１）７＋６型

＝（五＋２）＋（五＋１）＝（五＋五）＋（２＋１）＝拾＋３＝13

（２）（１）が退化して

７＋５型

＝（五＋２）＋五＝（五＋五）＋２＝拾＋２＝12

（３）９＋８型

＝（五＋４）＋（五＋３）＝（五＋五）＋（４＋３）＝拾＋（五＋２）＝17

（４）（３）が退化して

９＋６型

＝（五＋４）＋（五＋１）＝（五＋五）＋（４＋１）＝拾＋五＝15

（５）９＋３型・・・途中で（２）型になる

＝（五＋４）＋３＝五＋（４＋３）＝五＋（五＋２）＝（五＋五）＋２＝拾＋２＝12

（６）（５）が退化して

７＋３型

＝（五＋２）＋３＝五＋（２＋３）＝五＋五＝拾

３．繰り下がりのある引き算

（１）１３－７型・・・足し算２．（１）の反対

＝（拾＋３）－（五＋２）＝（五＋五＋３）－（五＋２）＝五＋１＝６

・・・（１）が退化した（足し算２．（２）の反対である）１２－７型と１２－５型は練習

（２）１７－９型・・・足し算２．（３）の反対

＝（拾＋五＋２）－（五＋４）＝（五＋五＋五＋２）－（五＋４）＝五＋（五－４）＋２

＝五＋１＋２＝五＋３＝８

（３）（２）が退化して

１５－８型・・・足し算２．（４）の反対

＝（拾＋五）－（五＋３）＝（五＋五＋五）－（五＋３）＝五＋（五－３）＝五＋２＝７

（４）１２－８型・・・足し算２．（５）の反対

＝（拾＋２）－（五＋３）＝（五＋五＋２）－（五＋３）＝（五－３）＋２＝２＋２＝４

（５）１２－３型・・・足し算２．（５）の反対

＝（拾＋２）－３＝（五＋五＋２）－３＝五＋（五－３）＋２＝五＋２＋２＝五＋４＝９

（６）（４）が退化して

１０－６型・・・足し算２．（６）の反対

＝拾－（五＋１）＝（五＋五）－（五＋１）＝（五－１）＝４

・・・（５）が退化した１０－４型は練習

４．実践後の考察

近年の大学卒業研究ゼミナール等で扱ってみたが、「五」を補助単位として用いることが、「十」のまとまりを基本とする十進位取り記数法の理解へ干渉してしまう懸念はあった。

しかし、自然数において一目で判別できるのは１から５くらいまでなので「五」という階段の踊り場を設ける意味はある。また、2×5 が 10 の素因数分解であるという内部構造ゆえに、子どもから自発的に五・二進法が出てくる必然性がある。

繰り上がり・繰り下がりは、自然数の加法・減法の計算において、素過程をなす。通常の加数分解や減加法以外に、五・二進法や、手の指や、十露盤の玉などを想起する者、足し算九九・引き算九九として暗記する者もあるだろう。自然数の加法・減法の計算において複合過程を学ぶ小学校２年生以上では素過程の内部プロセスを問う事はないので、繰り上がり・繰り下がりの学びにおいて十のまとまりを活かす事を必須かつ共通のポイントとしつつ深追いはしないのが賢明だろう。

Ⅲ．異分母分数の足し算・引き算に関わる通分

$\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ の通分なら、縦3横2と、横3縦2でのタイル図（座布団）の切り方で説明がつく（図3参照)。$\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{6}$ の通分の様に分母どうしが互いに素でない場合は如何に説明すればよいか。上記の方法では、$\frac{10}{24}$ となってしまい壁にぶつかる。導入から数の世界での同じ大きさを表す分数での説明（抽象論）に持ち込むのでなく、あくまで（数の産みの親である）量による説明（タイル図の利用）で導入できないか。その答えが、むぎ書房の算数テキスト「わかる　さんすう５」[3] にある。図４を参照されたい。

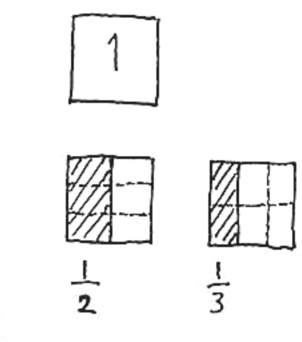

図３　$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ の通分を、月並みに、タイル図で考えた記述

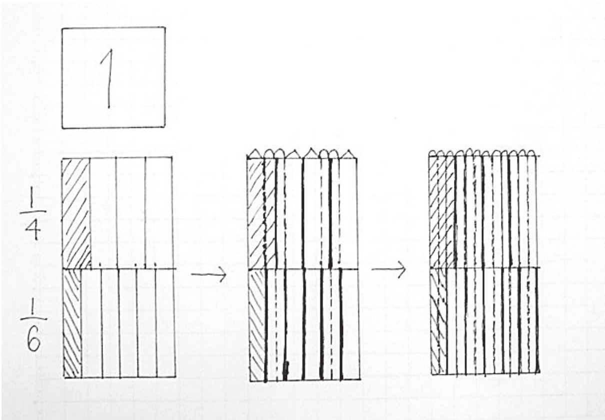

図４　$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ の通分をタイル図で考えた記述

（上記の図４について詳細説明すると、まず $\frac{1}{4}$ 毎と $\frac{1}{6}$ 毎の幅を突き合わせ、両者のずれで生じる一番狭い幅でもって全体を折り返すのである。これは将に共測量を見つけ出す互除法的プロセスである。）

（巻では一般的に、数の世界の中で、同じ大きさを表す分数の考えで、$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} = \cdots$，$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24}$ ・・・と導入するのだろう。）

（しかし、図４の方法では、量（タイル図）の世界での互除法的活動で、分母の最小公倍数による通分が、導き出されているのである。）

下記の１．でその方法を言語化し、２．で数学的に正当化した。

１．異分母分数の足し算・引き算に関わる通分をタイルの分割で実感する方法

a，b を自然数とする。a と b の最小公倍数を d とする。

1 および $\frac{1}{a}$ と $\frac{1}{b}$ の長さから $\frac{1}{d}$ の長さを作る方法を述べる。

大きさ 1 のタイルを、$\frac{1}{a}$ の間隔で等分するクサビを a−1 本入れる。・・・①

大きさ 1 のタイルを、$\frac{1}{b}$ の間隔で等分するクサビを b−1 本入れる。・・・②

タイル①とタイル②を上下に重ね透かし読みする。

このとき、クサビの間隔で最小のものが、$\frac{1}{d}$ であり、他の間隔は $\frac{1}{d}$ の整数倍である。

２．互除法の立場からの説明

a と b の最大公約数を c とする。

ユークリッドの互除法 $pa + qb = c$ すなわち $\frac{p}{b} + \frac{q}{a} = \frac{c}{ab} = \frac{1}{d}$ となる整数 p，q （符号は異なる）の存在から、$\frac{1}{d}$ がクサビの最小の間隔であることが導ける。

３．実践後の考察

これは、近年の大学卒業研究ゼミナールや教員免許更新講習で扱ってみたが、それなりに説得力があった。分数の故郷・必然性が互除法（幾何学的に言うと、ズレの折り返しにより共測量を得るプロセス）にある事の重要性を実感できた。

Ⅳ．負の数およびその演算について量の立場からの理解

以下の負の数の物質化とそれによる加減の（量的）理解は、榊忠男氏の著作４）および園田毅氏の実践記録[5)]から学んだ。

数とは事物に対する作用素であり、「物」ではなく「事」であろう。しかし、事と事の結節点として「物質化」することが、階段の踊り場の機能を果たし、理解を容易にする。

一般的に、正の数については、（小学校で）量的理解（集合数的）と、数直線を適宜利用した事的理解（順序数的）を行っている。これに対し、負の数は、（中学校で）数直線を利用した順序数的な理解のみが一般的である。

次の 1 . と 2. は、完全に園田毅氏の実践記録に依っている。

１．負の数の物質化

正粒子 □ = ＋1 点，負粒子 ■ = −1 点（＋1 点を打ち消す物）と決める。

例： □□□□ = ＋4 点

■■■ = −3 点（＋３点を打ち消す物）

0 点とは静止した無ではない： □□□■■■ = □□■■ = □■ = 0 点

２. 負の数の物質化による加減の理解

負の数の物質化により、負の数の加法・減法の説明が、順序数としての加法・減法だけでなく、小学校 1 年で行うような集合数の合併・増加あるいは求残・求差まで広がることになる。

2−5 = □□ ― 5 = □□ ＋ 0 ― 5 = □□ ＋ □□□■■■ ― 5

= □□□□□ ■■■ ― 5

= ■■■

= −3 （こうして 2− 5 を求残で捉えられた。）

３．負の数の物質化による乗法の理解

負の数の乗法、（附随して）除法の理解であるが、上記著作・実践記録では、赤と黒のトランプゲームおよび神経衰弱になるが、物的理解にあくまで執着すれば、下記の様に−n 枚分を n 枚分を打ち消す「物」と捉える方法に気付く。

（1）−n 枚

優待カード ＊＊＊＊＊ ＝ ＋1 枚、

借用カード ~~＊＊＊＊＊~~ ＝ − 1 枚 （＋1 枚分を打ち消す物）

と決める。

優待：リアルカード、 借用：ヴァーチャルカード

例：

＊＊＊＊＊ ＊＊＊＊＊ ＊＊＊＊＊ ＝ ＋3 枚 ・・・「優待カード 3 枚」

~~＊＊＊＊＊~~ ~~＊＊＊＊＊~~ ＝ −2 枚 ・・・「~~借用カード~~ 2 枚」

つまり、「優待カード 2 枚を打ち消す物」

0 枚とは静止した無ではない：

＊＊＊＊＊ ＊＊＊＊＊ ＊＊＊＊＊ ~~＊＊＊＊＊~~ ~~＊＊＊＊＊~~ ~~＊＊＊＊＊~~

＝ ＊＊＊＊＊ ＊＊＊＊＊ ~~＊＊＊＊＊~~ ~~＊＊＊＊＊~~

＝ ＊＊＊＊＊ ~~＊＊＊＊＊~~

＝ 0 枚

（2）− 1 枚分

＋3 点カード 1 枚を打ち消すもの（−1 枚）は、−3 点カード 1 枚である：

~~□□□~~ ＝ ~~□□□~~ ＋ 0 ＝ ~~□□□~~ ＋ □□□ ■■■.

＝ ~~□□□~~ □□□ + ■■■ = 0 + ■■■ = ■■■.

−3 点カード 1 枚を打ち消すもの（−1 枚）は、＋3 点カード 1 枚である：

~~■■■~~ ＝ ~~■■■~~ ＋ 0 ＝ ~~■■■~~ ＋ ■■■ □□□.

＝ ~~■■■~~ ■■■ ＋ □□□ ＝ 0 ＋ □□□ ＝ □□□.

（上で、途中の式変形がない方が、寧ろ分かり易いかもしれない。）

（３）負の数の乗法

負の数の乗法に対する量の立場からの理解より、次の公式を、成立せしめる。

(1 枚当たり点数) × (枚数) ＝総点数

正×正は：

(＋3) 点／枚 × (＋2) 枚 ＝ □□□ □□□ ＝ □□□□□□ ＝ ＋6 点

負×正は：

(－3) 点／枚 × (＋2) 枚 ＝ ■■■ ■■■ ＝ ■■■■■■ ＝ －6 点

正×負は：

(＋3) 点／枚 × (—2) 枚 ＝ ~~□□□~~ ~~□□□~~.

(＋3 点の 2 枚分を打ち消す物は､)

＝ ■■■ ■■■ (－3 点の 2 枚分である)

＝ ■■■■■■

＝ －6 点

負×負は：

(－3) 点／枚 × (－2) 枚 ＝ ~~■■■~~ ~~■■■~~.

(－3 点の 2 枚分を打ち消す物は､)

＝ □□□ □□□ (＋3 点の 2 枚分である)

＝ □□□□□□

＝ ＋6 点

４．実践後の考察

これらは、大学３・４年次セミナーや教員免許更新講習で試したところ、初めて聴く話であるそうで、感心は得られた。道具箱にはしまっておいて良い理解とはなった。３．（１）（２）を省き、いきなり３．（３）に進んだ方が、反応が著しく良い。

Ⅴ．おわりに

場面（物・事）と数の世界の間を、数構造を兼ね備えた半具体物であるタイル（数のシェーマ）で媒介させる（多数の実践家による）算数・数学科の教材論の蓄積は、現在の算数・数学教育に如何に資するであろうか。

数に関わる日本語（むしろ東洋語）特有の現象として助数詞の存在がある。この事は、数概念の抽象化が十分に行われていないとネガティヴな指摘をすることができるのは当然だが、数を産み出し豊かな数の世界を作り出してきた場面との繋がりを失わないという有難味がある。数の四則演算において単位（ディメンション）をはずさない流儀も同様であろう。

場面から量の世界での関係を見出し、数の世界での関係（これが数式である）に抽象化したうえで簡便に処理を行い、量の世界に戻し場面に還元するのが現在の学校教育現場での算数・数学科の学びであ

ろう。しかし、数の産みの親が量である以上、量感を孕んだタイルでの操作が、数の世界での関係認識に資する部分は大であろう。

一方、上記の教材論は主に 1960 年代から実践されており、その当時は未だ説明型即ち上意下達式の教育が主流であったが、現在では問題解決型 Active Learning が求められている。この事に対する配慮は当然必要である。

タイルを用いた算数・数学科の教材論に対する数学教育史的観点からの探求に留まらず、現在に活かす可能性を引き続き探求していく事が今後の課題である。

最後に、この場を借りて、表現の改善に関わる種々の御指摘、および有益な視点を御教示頂いた匿名の校閲者に記して感謝する。

注・文献

１）遠山啓　監修(1965 初版、その後 1979 第 2 回改訂)：わかる　さんすう１，むぎ書房，東京.

２）上掲１），64-75.

３）遠山啓　監修(1968 初版、その後 1984 第 2 回改訂)：わかる　さんすう５，むぎ書房，東京，27-35.

４）榊忠男　著（銀林浩　編）(1995)：アリスと悟空の数学旅行[正の数・負の数](数学ワンダーランド)，国土社，東京.

５）園田毅（2012）：実践記録（中学校）　楽しくわかる、みんなでわかる「正負の数」の授業をめざして，数学教室，58（３），54－65.