

# 非可換ノイズをもつスカラーテスト方程式に対する安定性解析

齊 藤 善 弘

## 概 要

確率微分方程式の数値解法について研究され、その形態に応じて種々のスキームが提案されている。本稿では多次元ノイズをもつスカラーの方程式を考え、その数値解法について述べる。特に非可換ノイズをもつスカラーテスト方程式に対する数値的安定性を調べ、結果を述べる。

## 1. はじめに

多次元ノイズをもつ1次元すなわちスカラー自励系の伊藤型確率微分方程式に対する確率初期値問題 (SIVP)

$$dX(t) = f(X(t))dt + \sum_{j=1}^m g_j(X(t))dW_j(t), \quad t > 0, \quad X(0) = X_0 \quad (1)$$

を考える。ここで、 $[W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t)]$  は  $m$  次元ウィナー過程である。確率微分方程式に対する最も基本的なスキームはオイラー・丸山スキームで、SIVP (1) の  $t = t_n = nh$  ( $h > 0$ ) における解  $X(t_n)$  に対する近似解を  $X_n$  とすると、次式で与えられる。

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + \sum_{j=1}^m g_j(X_n)\xi_{j,n}\sqrt{h} \quad (2)$$

ここで、 $h = t_{n+1} - t_n$  はステップ幅を意味し、各  $\xi_{j,n}$  は平均 0、分散 1 の独立な正規乱数  $N(0;1)$  である。また、 $\xi_{j,n}\sqrt{h}$  でもってウィナー過程の増分  $\Delta W_{j,n} = W_j(t_{n+1}) - W_j(t_n)$  を模擬する [5]。

オイラー・丸山スキームの強い収束次数は  $1/2$  であることが知られている [5]。

多次元ノイズをもつ SIVP (1) に対する強い 1 次の近似にはミルシュテイン・スキームがあり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = & X_n + f(X_n)h + \sum_{j=1}^m g_j(X_n) \xi_{j,n} \sqrt{h} \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^m \left[ g_{j_1} \frac{dg_{j_2}}{dx} \right] (X_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s dW_{j_1}(r) dW_{j_2}(s)
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで、ミルシュテイン・スキームに現れる確率重積分は、次の条件

$$g_{j_1} \frac{dg_{j_2}}{dx} = g_{j_2} \frac{dg_{j_1}}{dx} \tag{4}$$

を満たすとき、

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s dW_{j_1}(r) dW_{j_2}(s) = \frac{1}{2} (\xi_{j_1,n} \xi_{j_2,n} - \delta_{j_1, j_2}) h \tag{5}$$

と計算できる。ここで  $\delta_{j_1, j_2}$  はクロネッカーのデルタ (Kronecker delta) である。よって、条件

(4) を満たす場合のミルシュテイン・スキームは

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = & X_n + f(X_n)h + \sum_{j=1}^m g_j(X_n) \xi_{j,n} \sqrt{h} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m \left[ g_{j_1} \frac{dg_{j_2}}{dx} \right] (X_n) (\xi_{j_1,n} \xi_{j_2,n} - \delta_{j_1, j_2}) h
\end{aligned} \tag{6}$$

と記述できる。条件式 (4) は可換条件 (commutativity condition) と呼ばれ、可換条件を満たす SIVP (1) を可換ノイズをもつ SIVP、条件を満たさない場合を非可換ノイズをもつ SIVP と呼ぶことにする。

非可換ノイズをもつ SIVP (1) の厳密な 1 次法は存在しないが、近似的に 1 次を達成するスキームが提案されており [5]、この場合、確率重積分は

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s dW_{j_1}(r) dW_{j_2}(s) = \frac{1}{2} (\xi_{j_1,n} \xi_{j_2,n} - \delta_{j_1, j_2}) h + A_{j_1, j_2}(h) \tag{7}$$

になる。ここで、

$$A_{j_1, j_2}(h) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \chi_{j_1, n, k} \left( \zeta_{j_2, n, k} + \sqrt{2} \xi_{j_2, n} \right) - \chi_{j_2, n, k} \left( \zeta_{j_1, n, k} + \sqrt{2} \xi_{j_1, n} \right) \right\} \quad (8)$$

である。スキーム (3) および式 (7)、(8) に現れる  $\xi_{j_1, n}$ 、 $\xi_{j_2, n}$ 、 $\chi_{j_1, n, k}$ 、 $\chi_{j_2, n, k}$ 、 $\zeta_{j_1, n, k}$ 、 $\zeta_{j_2, n, k}$  は互いに独立な標準正規乱数  $N(0; 1)$  である。非可換ノイズに対するミルシュテイン・スキームを使用する場合は、 $A_{j_1, j_2}(h)$  をつぎの  $A_{j_1, j_2}^p(h)$  で近似する [5]。

$$A_{j_1, j_2}^p(h) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left\{ \chi_{j_1, n, k} \left( \zeta_{j_2, n, k} + \sqrt{2} \xi_{j_2, n} \right) - \chi_{j_2, n, k} \left( \zeta_{j_1, n, k} + \sqrt{2} \xi_{j_1, n} \right) \right\}$$

多次元ノイズをもつ確率微分方程式 (1) に対する数値スキームの安定性解析は文献 [1] に見ることができる。しかし、考えているテスト方程式は乗法的ノイズであり、可換条件 (4) を満たす。本稿では、確率微分方程式 (1) に対するテスト方程式として、つぎを考える。

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW_1(t) + \sigma dW_2(t), \quad t > 0, \quad X(0) = 1 \quad (9)$$

ここで、定数  $\lambda$ 、 $\mu$  と  $\sigma$  は実数、ただし  $\mu \geq 0$ 、 $\sigma \geq 0$  とする。テスト方程式 (9) は非可換ノイズになることに注意する。すなわち、可換条件 (4) を満たさない。実際

$$0 = g_1 \frac{dg_2}{dx} \neq g_2 \frac{dg_1}{dx} = \mu\sigma$$

である。また、テスト方程式 (9) の厳密解は

$$X(t) = \Phi(t) \left\{ 1 + \sigma \int_0^t \Phi^{-1}(s) dW_2(s) \right\} \quad (10)$$

となる。厳密解 (10) に現れる関数  $\Phi(t)$  はつぎの線型の確率微分方程式

$$d\Phi(t) = \lambda\Phi(t)dt + \mu\Phi(t)dW_1(t), \quad t > 0, \quad X(0) = 1 \quad (11)$$

の解で、

$$\Phi(t) = \exp \left( \left( \lambda - \frac{1}{2} \mu^2 \right) t + \mu W_1(t) \right) \quad (12)$$

である [2, 6]。厳密解 (10) の形式に着目すると、加法的ノイズのテスト方程式の解によく似ている。したがって、数値スキームの安定性は解の 1 次モーメント、2 次モーメントについて解析することにする。テスト方程式 (9) の解の 1 次モーメントおよび 2 次モーメントは

$$\mathbb{E}[X(t)] = \exp \lambda t, \quad \mathbb{E}[(X(t))^2] = \exp \{(2\lambda + \mu^2)t\} + \sigma^2 \int_0^t \exp \{(2\lambda + \mu^2)(t-s)\} ds$$

となる。したがって、 $\lambda < 0$  のとき、

$$\mathbb{E}[X(t)] \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (13)$$

が、 $2\lambda + \mu^2 < 0$  のとき、

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] \rightarrow -\frac{\sigma^2}{2\lambda + \mu^2} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (14)$$

が各々成り立つ。次節では、オイラー・丸山スキーム (2) とミルシュテイン・スキーム (3) の安定性解析を行い、最後にまとめと今後の課題を述べる (3 節)。

## 2. 安定性解析

本節では、テスト方程式 (9) に対して、オイラー・丸山スキーム (2) とミルシュテイン・スキーム (3) の安定性を調べる。

テスト方程式 (9) にオイラー・丸山スキームを適用すると、

$$X_{n+1} = X_n + \lambda X_n h + \mu X_n \xi_{1,n} \sqrt{h} + \sigma \xi_{2,n} \sqrt{h} \quad (15)$$

を得る。同様にミルシュテイン・スキームの場合は

$$X_{n+1} = X_n + \lambda X_n h + \mu X_n \xi_{1,n} \sqrt{h} + \sigma \xi_{2,n} \sqrt{h} + \mu^2 X_n I_{(1,1)} + \mu \sigma I_{(2,1)} \quad (16)$$

になる。ここで、

$$I_{(1,1)} = \frac{1}{2} (\xi_{1,n} \xi_{2,n} - 1) h, \quad I_{(2,1)} = \frac{1}{2} \xi_{1,n} \xi_{2,n} h + A_{2,1}(h),$$

$$A_{2,1}(h) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \chi_{2,n,k} \left( \xi_{1,n,k} + \sqrt{2} \xi_{1,n} \right) - \chi_{1,n,k} \left( \xi_{2,n,k} + \sqrt{2} \xi_{2,n} \right) \right\}$$

まず、1次モーメントに関する安定性を調べる。漸化式 (15)、(16) に対して期待値をとると、

両スキームとも

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = (1 + \lambda h) \mathbb{E}[X_n]$$

を得る。したがって、オイラー・丸山スキームおよびミルシュテイン・スキームの1次モーメントが安定になる条件は

$$|1 + \lambda h| < 1 \quad (17)$$

となる。よって、条件(17)を満たせば、オイラー・丸山スキームおよびミルシュテイン・スキームによる近似解は性質(13)と同様の性質、すなわち $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ を満たすことがわかる。

今度は、近似解の2次モーメントをみよう。オイラー・丸山スキームの場合は、式(15)より、

$$\mathbb{E}[(X_{n+1})^2] = \{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\} \mathbb{E}[(X_n)^2] + \sigma^2 h$$

したがって、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{n+1})^2] &= \{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\}^2 \mathbb{E}[(X_{n-1})^2] + [\{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\} + 1] \sigma^2 h \\ &\quad \vdots \\ &= \{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\}^{n+1} \mathbb{E}[(X_0)^2] + [\{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\}^n + \dots + \{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\} + 1] \sigma^2 h \end{aligned}$$

最終的に

$$\mathbb{E}[(X_n)^2] = \{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\}^n \mathbb{E}[(X_0)^2] + \sigma^2 \frac{\{(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h\}^n - 1}{2\lambda + \mu^2 + \lambda^2 h} \quad (18)$$

を得る。よって、 $(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h \geq 0$ であることに注意すると、 $(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h < 1$ ならば収束し、

$$\mathbb{E}[(X_n)^2] \rightarrow -\frac{\sigma^2}{2\lambda + \mu^2 + \lambda^2 h} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (19)$$

が成り立つ。同様の計算をミルシュテイン・スキームの漸化式 (16) に対して行くと、

$$\mathbb{E}[(X_{n+1})^2] = \left\{ (1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h + \frac{\mu^4 h^2}{2} \right\} \mathbb{E}[(X_n)^2] + \sigma^2 h + \frac{\sigma^2 \mu^2}{2} h^2$$

が得られる。計算には、性質

$$\mathbb{E}[\xi_{i,n} I_{(i,1)}] = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad \mathbb{E}[I_{(1,1)} I_{(2,1)}] = 0, \quad \mathbb{E}[I_{(j,1)}^2] = \frac{1}{2} h^2 \quad (j = 1, 2)$$

を使用した。よって、最終的に

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n)^2] &= \left\{ (1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h + \frac{\mu^4 h^2}{2} \right\}^n \mathbb{E}[(X_0)^2] \\ &\quad + \sigma^2 \left( 1 + \frac{\mu^2}{2} h \right) \frac{\left\{ (1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h + \frac{\mu^4 h^2}{2} \right\}^n - 1}{2\lambda + \mu^2 + \lambda^2 h + \frac{\mu^4 h}{2}} \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $(1 + \lambda h)^2 + \mu^2 h + \frac{\mu^4 h^2}{2} < 1$  ならば収束し、

$$\mathbb{E}[(X_n)^2] \rightarrow -\frac{\sigma^2 \left( 1 + \frac{\mu^2}{2} h \right)}{2\lambda + \mu^2 + \lambda^2 h + \frac{\mu^4 h}{2}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (20)$$

が成り立つ。

また、式 (19) および (20) から、オイラー・丸山スキームとミルシュテイン・スキームが漸近的平均二乗整合性 (asymptotically consistency in mean square) をもつことがわかる [7]。すなわち、(14) と関連する性質

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n)^2] \right) = -\frac{\sigma^2}{2\lambda + \mu^2} \quad (21)$$

を満たす。

2乗平均値が安定に求まる条件、すなわちオイラー・丸山スキームの場合は  $(1+\lambda h)^2 + \mu^2 h < 1$ 、ミルシュテイン・スキームの場合は  $(1+\lambda h)^2 + \mu^2 h + \frac{\mu^4 h^2}{2} < 1$  の領域を図示すると、各々Figure 1、Figure 2 になる。ただし、横軸は  $\lambda h$ 、縦軸は  $\mu^2 h$  である。

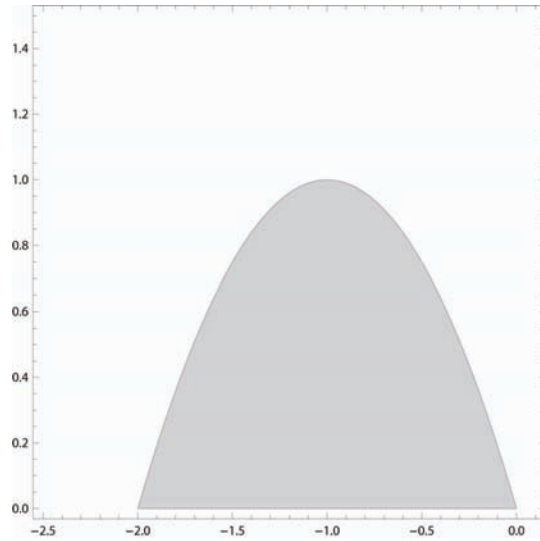


Figure 1. Stability region of Euler-Maruyama scheme(2).

これらの安定領域の結果は乗法的ノイズをもつテスト方程式

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW_1(t), \quad t > 0, \quad X(0) = 1$$

に対する安定性解析の結果と同じであることに注意する [3, 4]。

### 3. まとめと今後の課題

本稿では、非可換ノイズをもつスカラーテスト方程式を考え、オイラー・丸山スキームとミルシュテイン・スキームについて安定性を調べた。解析の手法は、加法的ノイズのテスト問題と類似の方法を用いた。結果的に、安定性の条件は乗法的ノイズをもつテスト方程式と同一になることがわかった。今後の課題は、本稿で述べたテスト方程式に対して、数値結果による検証と2乗平均値の安定性を詳しく調べることである。

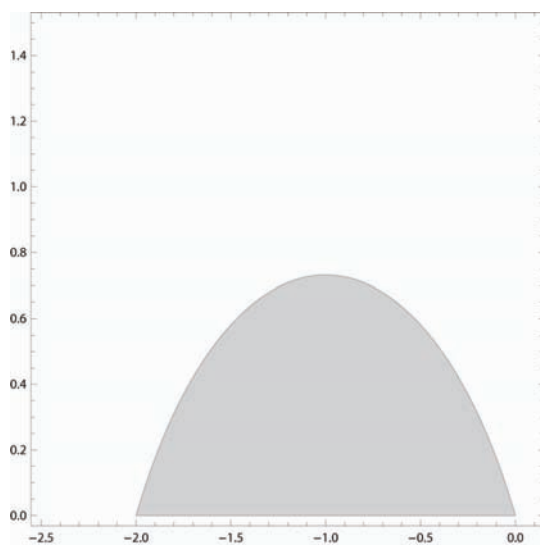


Figure 2. Stability region of Milstein scheme(3).

### 参考文献

- [ 1 ] Buckwar, E. and Sickenberger, T., 2011, “A comparative linear mean-square stability analysis of Maruyama and Milstein-type methods”, *Math. Comput. Simul.* 81, pp 1110-1127
- [ 2 ] Gard, T. C., 1988, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker
- [ 3 ] Higham, D. J., 2000, “Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method”, *SIAM J. Numer. Anal.*, 38, pp 753-769
- [ 4 ] Higham, D. J., 2000, “A-stability and stochastic mean-square stability”, *BIT*, 40, pp 404-409
- [ 5 ] Kloeden, P.E., and Platen, E., 1992, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag
- [ 6 ] Mao, X., 1997, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood
- [ 7 ] Saito, Y., 2008, “Stability analysis of numerical methods for stochastic systems with additive noise”, *Review of Economics and Information Studies*, 8(3•4), pp 119-123