円の内接四角形について

兼　山　瓊　典

On inscribed quadrilaterals of the circle

Tamafumi KANEYAMA

Abstract

Take n points on a circle which divide equally the circle. Choose four points from n points and make inscribed quadrilaterals of the circle. In this case, some quadrilaterals are congruent by rotating or flipping. How many non-congruent quadrilaterals are there? In this paper we calculate the number of non-congruent quadrilaterals.

キーワード　内接四角形，合同

1．はじめに

円をn等分してそのうちの4点を取り結ぶと四角形ができる．このとき色々な形の四角形ができるが，回転したり，裏返したりする移動で合同であるものや合同でない四角形がある．その中で，合同でない四角形はどの位の種類があるだろうか．nの値が小さいときは簡単に数えることができる．$n=1,2,3$の時は4点取れないから四角形はない．$n=4,5$のときは四角形は1とおりであり，$n=6$のときは合同でない四角形は3とおりである．大きなnに対してもそのような四角形はどの位あるだろうか．ここで一般のnに対して合同でない四角形の個数を求めることとする．

2．四角形の個数と表し方

ここでは，円をn等分した点から4点選び四角形を作るとき，合同でない四角形は何種類あるかを考える．n等分点から選んでできる合同でない四角形の個数をa_nとする．nが小さいときは四角形が描けない．描けるときは実際に数えて次のようになる．

$$a_1=0, a_2=0, a_3=0, a_4=1, a_5=1, a_6=3, a_7=4, a_8=8, \cdots$$

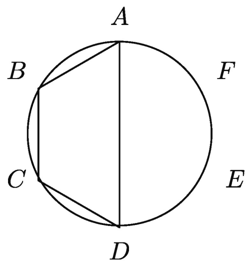
円をn等分して4点を取り四角形を作るが，その四角形をどのように表すかが問題になる．4点を取るからその4点で四角形を表すのが良いのか，またはそのほかの方法を考えた方が良いのであろうか．ここでは，四角形の辺がn等分のいくつ分であるかで，四角形を表すことにする．

※　kaneyama@gifu.shotoku.ac.jp

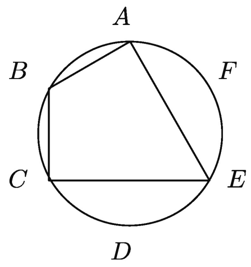
定義２．１　円をn等分して４点を取り四角形を作る．

四角形 $[a,b,c,d]$ とは，四角形のある頂点から順に数えて弧の長さが a,b,c,d である四角形を表す．合同の四角形は等号で表すことにする．

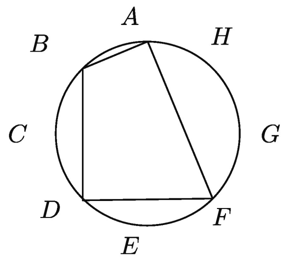
たとえば次の図の場合



$[1,1,1,3]$



$[1,1,2,2]$



$[1,2,2,3]$

左側の四角形は頂点の取り方が点Ａから左回りに考えて，１，１，１，３であるので $[1,1,1,3]$ と表すことにする．中央は $[1,1,2,2]$ である．右側は $[1,2,2,3]$ である．回転は最初に取る点を変えれば良いから，数字の順番をずらせば良い．また四角形を裏返すのは数字の順番を反対に並べれば良い．すなわち

$$[1,1,1,3]=[1,1,3,1]=[1,3,1,1]=[3,1,1,1]$$

$$[1,1,2,2]=[1,2,2,1]=[2,2,1,1]=[2,1,1,2]$$

$$[1,2,2,3]=[2,2,3,1]=[2,3,1,2]=[1,3,2,2]=[3,2,2,1]=\cdots$$

などで四角形が合同の時は等号で表すことにする．

最初に，一番短い辺が１である場合を考える．

命題２．２　４辺の長さが，$1,a,b,c$ である時合同でない四角形の数は次の通りである．

1. $1<a<b<c$ のとき，3 種類.
2. $1=a<b<c$ のとき，2 種類.
3. $1<a=b<c$ のとき，2 種類.
4. $1<a<b=c$ のとき，2 種類.
5. $1=a<b=c$ のとき，2 種類.
6. $1=a=b<c$ のとき，1 種類.
7. $a=b=c$ のとき，1 種類.

証明　各々の場合について合同でない四角形を数えてみれば良い．実際

1．$1 < a < b < c$ のとき，$[1, a, b, c], [1, b, a, c], [1, a, c, b]$ である．
なぜならば，1から始まるものを考えると a, b, c の順列で6通りあるが，裏返し移動により，数字の順序を反対向きにすることにより，

$$[1, b, c, a] = [1, a, c, b], \quad [1, c, a, b] = [1, b, a, c], \quad [1, b, c, a] = [1, a, c]$$

となるから3種類である．

2．$1 = a < b < c$ のとき，$[1, 1, b, c], [1, 1, c, b]$ の2種類である．
3．$1 < a = b < c$ のとき，$[1, a, a, c], [1, a, c, a]$ の2種類である．
4．$1 < a < b = c$ のとき，$[1, a, b, b], [1, b, a, b]$ の2種類である．
5．$1 = a < b = c$ のとき，$[1, 1, b, b], [1, b, 1, b]$ の2種類である．
6．$1 = a = b < c$ のとき，$[1, 1, 1, c]$ のみの1種類である．
7．$a = b = c$ のとき，$[1, a, a, a]$ のみの1種類である．

3．最小辺が1の場合

前の節の命題により，最小辺が1の場合は，3つの自然数 a, b, c によって合同な四角形がいくつか決まるから，3つの自然数 a, b, c の取り方を数えれば良い．

命題3．1　自然数 $n \geqq 3$ に対して，$a + b + c = n$ をみたす自然数の組 (a, b, c) は

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

である．

これはよく知られた結果である．これを利用して，色々な場合の自然数の組 (a, b, c) の数を求めれば良い．順に計算すれば次の命題の表が得られる．

命題3．2　自然数 $n \geqq 6$ に対して，$a + b + c = n$ をみたす自然数とする．各々の条件をみたす (a, b, c) の組の数は次の表のようである．

n	$n=6k$	$n=6k+1$	$n=6k+2$	$n=6k+3$	$n=6k+4$	$n=6k+5$
a,b,c の 2 つが同じ	$9k-6$	$9k$	$9k$	$9k$	$9k+3$	$9k+6$
$a=b=c$	1	0	0	1	0	0
a,b,c が全て異なる	$18k^2-18k+6$	$18k^2-12k$	$18k^2-6k$	$18k^2$	$18k^2+6k$	$18k^2+12k$
$1\leqq\ a<b<c$	$3k^2-3k+1$	$3k^2-2k$	$3k^2-k$	$3k^2$	$3k^2+k$	$3k^2+2k$
$1=a<b<c$	$3k-2$	$3k-2$	$3k-1$	$3k-1$	$3k$	$3k$
$1<a<b<c$	$3k^2-6k+3$	$3k^2-5k+2$	$3k^2-4k+1$	$3k^2-3k+1$	$3k^2-2k$	$3k^2-k$
$1<a=b<c$	$2k-2$	$2k-1$	$2k-1$	$2k-1$	$2k$	$2k$
$1<a<b=c$	$k-1$	$k-1$	k	$k-1$	k	k
$1=a<b=c$	0	1	0	1	0	1
$1=a=b<c$	1	1	1	1	1	1
$a=b=c$	1	0	0	1	0	0

この命題の表は上から順に計算すれば良い．その後に表の下の方を前の節の命題を使うために同じものを記述してある．

命題 3．3　自然数 $n\geqq 6$ とする，円を $n+1$ 等分してその点で 4 角形を作る．最小の辺が 1 であるとき合同でない四角形の個数は

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}n^2-n+1 & (n\text{ が偶数のとき})\\[2ex] \dfrac{1}{4}n^2-n+\dfrac{7}{4} & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

である．

証明　前の命題で求めた a,b,c の組の数により合同でない四角形の個数は次のようになる．

$$n=6k\text{ のとき}\quad 9k^2-6k+1=\frac{1}{4}n^2-n+1$$

$$n=6k+1\text{ のとき}\quad 9k^2-3k+1=\frac{1}{4}n^2-n+\frac{7}{4}$$

$$n=6k+2\text{ のとき}\quad 9k^2=\frac{1}{4}n^2-n+1$$

$$n=6k+3\text{ のとき}\quad 9k^2+3k+1=\frac{1}{4}n^2-n+\frac{7}{4}$$

$$n=6k+4\text{ のとき}\quad 9k^2+6k+1=\frac{1}{4}n^2-n+1$$

$$n=6k+5\text{ のとき}\quad 9k^2+9k+3=\frac{1}{4}n^2-n+\frac{7}{4}$$

よって，命題が示された．

4．一般の場合

前の節で最小辺が 1 の場合の合同でない四角形の個数を求めたので，一般の場合を考える．最小辺が 2 以上の時は全ての辺の数から，1 を引くことにより $n-4$ 等分点の場合に帰着される．よって

命題4．1 自然数 $n \geqq 6$ とする，円を $n+1$ 等分してその点で四角形を作る．合同でない四角形の個数を a_n とするとき，

$$a_{n+1} = f(n) + a_{n-3}$$

である．ただし $f(n)$ は

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}n^2 - n + 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\[2ex] \dfrac{1}{4}n^2 - n + \dfrac{7}{4} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

で定義される関数である．

この式は $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ であるから，$n \geqq 4$ の時も成立する．

この結果を用いて a_n の値を計算してみよう．

$$\begin{aligned}
a_{4n+1} &= f(4n) + f(4(n-1)) + \cdots + f(8) + a_5 \\
&= f(4n) + f(4(n-1)) + \cdots + f(8) + f(4) \quad (a_5 = 1 = f(4) \text{ より}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1) \\
&= \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) \quad (n \geqq 1) \\
a_{4n+2} &= f(4n+1) + f(4(n-1)+1) + \cdots + f(9) + f(5) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 2k + 1) \\
&= \frac{1}{3}n(4n^2 + 3n + 2) \quad (n \geqq 1) \\
a_{4n+3} &= f(4n+2) + f(4(n-1)+2) + \cdots + f(10) + f(6) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 4k^2 \\
&= \frac{2}{3}n((n+1)(2n+1) \quad (n \geqq 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4n+4} &= f(4n+3)+f(4(n-1)+3)+\cdots+f(11)+f(7)+a_4 \\ &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2+2k+1)+1 \\ &= \frac{1}{3}n(4n^2+9n+8)+1 \\ &= \frac{1}{3}(4n^3+9n^2+8n+3) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+5n+3) \quad (n \geqq 1) \end{aligned}$$

これは $a_4=1$ であるから，

$$a_{4n}=\frac{1}{3}n(4n^2-3n+2) \quad (n \geqq 1)$$

と表せる．また，a_{4n+1}とa_{4n+3}は次のようにまとめられる．

$$a_{2n+1}=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \quad (n \geqq 1)$$

以上の結果をまとめて次の命題を得る．

定理４．２　自然数nとする，円をn等分してその点で４角形を作る．合同でない四角形の個数a_nの値は

$$\begin{aligned} a_{4n} &= \frac{1}{3}n(4n^2-3n+2) \quad (n \geqq 1) \\ a_{4n+2} &= \frac{1}{3}n(4n^2+3n+2) \quad (n \geqq 1) \\ a_{2n+1} &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \quad (n \geqq 1) \end{aligned}$$

である．

この定理ですべてのa_nが求まるが，nの小さな値に対して少し計算してみると次のようである．

n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n
1	0	6	3	11	20	16	72
2	0	7	4	12	29	17	84
3	0	8	8	13	35	18	104
4	1	9	10	14	47	19	120
5	1	10	16	15	56	20	145

a_nの一般項が求まったが，少し複雑である．これより計算すればa_nの間の少し綺麗な関係式が求まる．

命題４．３

1. $a_{4n+1} - a_{4n} = n(n-1)$
2. $a_{4n+2} - a_{4n+1} = n(n+1)$
3. $a_{4n+3} - a_{4n+2} = n^2$
4. $a_{4n+4} - a_{4n+3} = (n+1)^2$
5. $a_{2n+3} - a_{2n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

５．五角形の場合

円をn等分して５点を取り，五角形を作る．合同でない五角形の数をb_nとする．

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, b_5 = 1, b_6 = 1, b_7 = 3, b_8 = 5, b_9 = 9, \cdots$$

ここでb_nの値を求めてみることを考える．考え方は四角形の場合と同じであり，記号等も同じ使い方である．

命題５．１　５辺の長さが，$1, a, b, c, d$である時合同でない五角形の数は次の通りである．

1. $1 < a < b < c < d$のとき，12 種類．
2. $1 < a = b < c < d$または$1 < a < b = c < d$または$1 < a < b < c = d$のとき，6 種類．
3. $1 = a < b < c < d$のとき，6 種類．
4. $1 < a = b < c = d$または$1 = a < b = c < d$または$1 = a < b < c = d$のとき，4 種類．
5. $1 < a = b = c < d$または$1 < a < b = c = d$または$1 = a < b = c = d$または$1 = a = b < c < d$または$1 = a = b < c = d$のとき，2 種類．
6. $1 < a = b = c = d$または$1 = a = b = c < d$のとき，1 種類．

証明　各々の場合について合同でない五角形を注意深く数えてみる．回転は数字の始める順を変えれば良いし，裏返しは数字を逆順にすれば良い．実際次のようになる．

1．$1<a<b<c<d$ のとき，12種類は，

$[1,a,b,c,d],[1,a,c,b,d],[1,b,a,c,d],[1,b,c,a,d],[1,c,a,b,d],[1,c,b,a,d]$

$[1,a,b,d,c],[1,a,c,d,b],[1,b,a,d,c],[1,b,c,d,a],[1,c,a,d,b],[1,c,b,d,a]$

2．$1<a=b<c<d$ のとき，６種類は，
$[1,a,a,c,d],[1,a,a,d,c],[1,a,c,a,d],[1,a,d,a,c],[1,a,c,d,a],[1,c,a,a,d]$
$1<a<b=c<d$ のとき，６種類は，
$[1,b,b,a,d],[1,b,b,d,a],[1,b,a,b,d],[1,b,d,b,a],[1,b,a,d,b],[1,a,b,b,d]$
$1<a<b<c=d$ のとき，６種類は，
$[1,c,c,a,b],[1,c,c,b,a],[1,c,a,c,b],[1,c,b,c,a],[1,c,a,b,c],[1,a,c,c,b]$

3．$1=a<b<c<d$ のとき，６種類は，
$[1,1,b,c,d,],[1,1,c,b,d],[1,1,b,d,c],[1,b,1,c,d],[1,c,1,b,d],[1,d,1,b,c]$

4．$1<a=b<c=d$ のとき，４種類は　$[1,a,a,c,c][,1,a,c,a,c],[1,a,c,c,a],[1,c,a,a,c]$
$1=a<b=c<d$ のとき，４種類は　$[1,1,b,b,d],[1,1,b,d,b],[1,b,1,b,d],[1,d,1,b,b]$
$1=a<b<c=d$ のとき，４種類は　$[1,1,c,c,b],[1,1,c,b,c],[1,c,1,c,b],[1,b,1,c,c]$

5．$1<a=b=c<d$ のとき，２種類は　$[1,a,a,a,d],[1,a,a,d,a]$
$1<a<b=c=d$ のとき，２種類は　$[1,b,b,b,a],[1,b,b,a,b]$
$1=a<b=c=d$ のとき，２種類は　$[1,1,b,b,b],[1,b,1,b,b]$
$1=a=b<c<d$ のとき，２種類は　$[1,1,1,c,d],[1,1,c,1,d]$
$1=a=b<c=d$ のとき，２種類は　$[1,1,1,c,c],[1,1,c,1,c]$

6．$1<a=b=c=d$ のとき，$[1,a,a,a,a],1=a=b=c<d$ のとき，$[1,1,1,1,d]$

６．具体的計算

前の節のことより，それぞれの場合について，自然数 $a,b,c,d(a+b+c+d=n)$ の組の数を求めれば良い．それぞれの場合について順に計算していく．次の命題のために，四角形の場合に計算した次の補題を用意する，

補題６．１　$0<b<c<d,\ b+c+d=m\ (m\geqq 6)$ をみたす自然数の組 $p(m)$ は

$m=12k$ のとき	$12k^2-6k+1$	$m=12k+6$ のとき	$12k^2+6k+1$
$m=12k+1$ のとき	$12k^2-4k$	$m=12k+7$ のとき	$12k^2+8k+1$
$m=12k+2$ のとき	$12k^2-2k$	$m=12k+8$ のとき	$12k^2+10k+2$
$m=12k+3$ のとき	$12k^2$	$m=12k+9$ のとき	$12k^2+12k+3$
$m=12k+4$ のとき	$12k^2+2k$	$m=12k+10$ のとき	$12k^2+14k+4$
$m=12k+5$ のとき	$12k^2+4k$	$m=12k+11$ のとき	$12k^2+16k+5$

である．

系6．2 $a=1<b<c<d,\ a+b+c+d=n\ (n \geqq 10)$ をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$12k^2-14k+4$	$n=12k+6$ のとき	$12k^2-2k$
$n=12k+1$ のとき	$12k^2-12k+3$	$n=12k+7$ のとき	$12k^2$
$n=12k+2$ のとき	$12k^2-10k+2$	$n=12k+8$ のとき	$12k^2+2k$
$n=12k+3$ のとき	$12k^2-8k+1$	$n=12k+9$ のとき	$12k^2+4k$
$n=12k+4$ のとき	$12k^2-6k+1$	$n=12k+10$ のとき	$12k^2+6k+1$
$n=12k+5$ のとき	$12k^2-4k$	$n=12k+11$ のとき	$12k^2+8k+1$

である．

なぜならば，$a=1$ だから，$0<b-1<c-1<d-1,\ (b-1)+(c-1)+(d-1)=n-4$ より補題6．1を適用する．

命題6．3 $0<a<b<c<d,\ a+b+c+d=n\ (n \geqq 10)$ をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$12k^3-15k^2+6k-1$	$n=12k+6$ のとき	$12k^3+3k^2$
$n=12k+1$ のとき	$12k^3-12k^2+3k$	$n=12k+7$ のとき	$12k^3+6k^2$
$n=12k+2$ のとき	$12k^3-9k^2+2k$	$n=12k+8$ のとき	$12k^3+9k^2+2k$
$n=12k+3$ のとき	$12k^3-6k^2$	$n=12k+9$ のとき	$12k^3+12k^2+3k$
$n=12k+4$ のとき	$12k^3-3k^2$	$n=12k+10$ のとき	$12k^3+15k^2+6k+1$
$n=12k+5$ のとき	$12k^3\qquad -k$	$n=12k+11$ のとき	$12k^3+18k^2+8k+1$

である．

証明　$0<a<b<c<d,\ a+b+c+d=n$ は $0<b-a<c-a<d-a, (b-a)+(c-a)+(d-a)=n-4a, a>0$ と同値である．$b'=b-a, c'=c-a, d'=d-a$ とおくと，$b'+c'+d'=n-4a$ である．$n-4a \geqq 6$ より $1 \leqq a \leqq \dfrac{n-6}{4}$ この a にたいして，b', c', d' の組の数 A を前の補題を用いて求めれば良い．$p(m)$ は補題6．1の関数とすると

$$A=\sum_{a=1}^{\left[\frac{n-6}{4}\right]} p(n-4a)$$

であるから，n についてそれぞれの場合に計算する．和は $a=3h-2, 3h-1, 3h$ の3つに分けて計算する．

$n=12k\ (k \geqq 1)$ のとき

$$\begin{aligned} A &= \sum_{a=1}^{3k-2} p(n-4a) \\ &= \sum_{h=1}^{k} p(12(k-h)+8)+\sum_{h=1}^{k-1} p(12(k-h)+4)+\sum_{h=1}^{k-1} p(12(k-h)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} p(12i+8)+\sum_{i=1}^{k-1} p(12i+4)+\sum_{i=1}^{k-1} p(12i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k-1}(12i^2+10i+2)+\sum_{i=1}^{k-1}(12i^2+2i)+\sum_{i=1}^{k-1}(12i^2-6i+1) \\
&= 2+\sum_{i=1}^{k-1}(36i^2+6i+3) \\
&= 2+6(k-1)k(2k-1)+3k(k-1)+3(k-1) \\
&= 12k^3-15k^2+6k-1
\end{aligned}
$$

$n=12k+1\ (k \geqq\ 1)$ のとき

$$
\begin{aligned}
A\ &= \sum_{a=1}^{3k-2} p(n-4a) \\
&= \sum_{h=1}^{k} p(12(k-h)+9)+\sum_{h=1}^{k-1} p(12(k-h)+5)+\sum_{h=1}^{k-1} p(12(k-h)+1) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} p(12i+9)+\sum_{i=1}^{k-1} p(12i+5)+\sum_{i=1}^{k-1} p(12i+1) \\
&= 3+\sum_{i=1}^{k-1}\{(12i^2+12i+3)+(12i^2+4i)+(12i^2-4i)\} \\
&= 3+\sum_{i=1}^{k-1}(36i^2+12i+3) \\
&= 2+3(k-1)(4k^2+1) \\
&= 12k^3-12k^2+3k
\end{aligned}
$$

以下同様に行う

系６．４　$1<a<b<c<d,\ a+b+c+d=n\ (n \geqq\ 10)$ をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$12k^3-27k^2+20k-5$	$n=12k+6$ のとき	$12k^3-9k^2+2k$
$n=12k+1$ のとき	$12k^3-24k^2+15k-3$	$n=12k+7$ のとき	$12k^3-6k^2$
$n=12k+2$ のとき	$12k^3-21k^2+12k-2$	$n=12k+8$ のとき	$12k^3-3k^2$
$n=12k+3$ のとき	$12k^3-18k^2+8k-1$	$n=12k+9$ のとき	$12k^3\qquad -k$
$n=12k+4$ のとき	$12k^3-15k^2+6k-1$	$n=12k+10$ のとき	$12k^3+3k^2$
$n=12k+5$ のとき	$12k^3-12k^2+3k$	$n=12k+11$ のとき	$12k^3+6k^2$

である.

命題６．５　$a+b+c+d=n\ (n \geqq\ 9)$　かつ

$0<a=b<c<d$ または $0<a<b=c<d$ または $0<a<b<c=d$

をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$18k^2-13k+3$	$n=12k+6$ のとき	$18k^2+5k$
$n=12k+1$ のとき	$18k^2-7k$	$n=12k+7$ のとき	$18k^2+11k+1$
$n=12k+2$ のとき	$18k^2-7k$	$n=12k+8$ のとき	$18k^2+11k+2$
$n=12k+3$ のとき	$18k^2-k$	$n=12k+9$ のとき	$18k^2+17k+4$
$n=12k+4$ のとき	$18k^2-k$	$n=12k+10$ のとき	$18k^2+17k+3$
$n=12k+5$ のとき	$18k^2+5k$	$n=12k+11$ のとき	$18k^2+23k+7$

である.

証明　2つの同じものをh,hとして，他のものを$x,y(x<y)$とする．$x+y=n-2h$ より $x,y(x<y)$ の取り方は

$$x+y \text{ が偶数のとき，}\quad \frac{x+y-2}{2}=\frac{n-2h-2}{2}$$

$$x+y \text{ が奇数のとき，}\quad \frac{x+y-1}{2}=\frac{n-2h-1}{2}$$

である．xまたはyとhが一致する場合は除かなければならない．hが小さいと一致する．$(x,y)=(1,n-2h-1)$ より，$n-2h-1<h$ のときは一致するものがない．しかし $n=4h$ の時は一致する場合は$x=y=h$の時であるから引かなくても良い．

また$x+y=n-2h\geqq\ 3$より，$h\leqq\dfrac{n-3}{2}$である．

いまwの値を，$n=4k$ のとき$w=1$，その他のとき $w=0$ とおく．このとき求めるx，yの組の数Aは

nが偶数のとき

$$A\quad =w+\sum_{h=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}\left(\frac{n-2h-2}{2}-1\right)+\sum_{h=\left[\frac{n-1}{3}\right]+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\left(\frac{n-2h-2}{2}\right)$$

$$=w+\sum_{h=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\left(\frac{n-2h-2}{2}-1\right)+\sum_{h=\left[\frac{n-1}{3}\right]+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}1$$

$$=w+\sum_{h=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\left(\frac{n-2h-4}{2}\right)+\sum_{h=\left[\frac{n+2}{3}\right]}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}1$$

nが奇数のとき

$$A = \sum_{h=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} (\frac{n-2h-1}{2} - 1) + \sum_{h=\left[\frac{n-1}{3}\right]+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} (\frac{n-2h-1}{2})$$

$$= \sum_{h=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} (\frac{n-2h-1}{2} - 1) + \sum_{h=\left[\frac{n-1}{3}\right]+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} 1$$

$$= \sum_{h=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} (\frac{n-2h-3}{2}) + \sum_{h=\left[\frac{n+2}{3}\right]}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} 1$$

となる．これを具体的に計算する． $n = 12k$ のとき

$$A = 1 + \sum_{h=1}^{6k-2} (6k-2-l) + \sum_{h=4k}^{6k-2} 1$$

$$= 1 + (6k-2)^2 - (3k-1)(6k-1) + (2k-1)$$

$$= 18k^2 - 13k + 2$$

以下同様にできる．

補題６．６ $a+b+c+d=n\ (n \geqq 9)$ で最小のものが１でありかつ２つが同じのもの，すなわち$1=a=b<c<d$ または$1=a<b=c<d$ または$1=a<b<c=d$
をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$12k-6$	$n=12k+6$ のとき	$12k$
$n=12k+1$ のとき	$12k-5$	$n=12k+7$ のとき	$12k+1$
$n=12k+2$ のとき	$12k-4$	$n=12k+8$ のとき	$12k+2$
$n=12k+3$ のとき	$12k-2$	$n=12k+9$ のとき	$12k+4$
$n=12k+4$ のとき	$12k-3$	$n=12k+10$ のとき	$12k+3$
$n=12k+5$ のとき	$12k$	$n=12k+11$ のとき	$12k+6$

である．

証明 $a=1$ であるから， $b+c+d=n-1$ となり，四角形の場合の命題３．２より，結論が得られる．

上の命題６．５から補題６．６を引くことにより次を得る．

命題6．7　$a+b+c+d=n\ (n \geqq 9)$ かつ

$1<a=b<c<d$ または $1<a<b=c<d$ または $1<a<b<c=d$

をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$18k^2-25k+9$	$n=12k+6$ のとき	$18k^2-7k$
$n=12k+1$ のとき	$18k^2-19k+5$	$n=12k+7$ のとき	$18k^2-k$
$n=12k+2$ のとき	$18k^2-19k+4$	$n=12k+8$ のとき	$18k^2-k$
$n=12k+3$ のとき	$18k^2-13k+2$	$n=12k+9$ のとき	$18k^2+5k$
$n=12k+4$ のとき	$18k^2-13k+3$	$n=12k+10$ のとき	$18k^2+5k$
$n=12k+5$ のとき	$18k^2-7k$	$n=12k+11$ のとき	$18k^2+11k+1$

である．

補題6．8　$a+b+c+d=n\ (n \geqq 9)$で

$1=a<b=c<d$ または $1=a<b<c=d$

をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$6k-3$	$n=12k+6$ のとき	$6k$
$n=12k+1$ のとき	$6k-3$	$n=12k+7$ のとき	$6k$
$n=12k+2$ のとき	$6k-2$	$n=12k+8$ のとき	$6k+1$
$n=12k+3$ のとき	$6k-1$	$n=12k+9$ のとき	$6k+2$
$n=12k+4$ のとき	$6k-2$	$n=12k+10$ のとき	$6k+1$
$n=12k+5$ のとき	$6k$	$n=12k+11$ のとき	$6k+3$

である．

証明　3つの数をh，h，xとすると，$2h+x=n-1$となる．

$x=n-2h-1 \geqq 2$ より，$1<h \leqq \dfrac{n-3}{2}$ である．　よって，h は $\left[\dfrac{n-3}{2}\right]-1=\left[\dfrac{n-5}{2}\right]$ 個あり，hを決めるとxがきまる．$x=h$になる場合，すなわち $3h=n-1$ のときは1個だけ引いておくと命題を得る．

補題6．9　$a+b+c+d=n\ (n \geqq 9)$ で $1<a=b<c=d$ をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$3k-2$	$n=12k+6$ のとき	$3k$
$n=12k+1$ のとき	0	$n=12k+7$ のとき	0
$n=12k+2$ のとき	$3k-1$	$n=12k+8$ のとき	$3k$
$n=12k+3$ のとき	0	$n=12k+9$ のとき	0
$n=12k+4$ のとき	$3k-1$	$n=12k+10$ のとき	$3k+1$
$n=12k+5$ のとき	0	$n=12k+11$ のとき	0

である．

証明　$a+c=\dfrac{n}{2}$より明らかである．

上の2つをまとめて

命題6．10　$a+b+c+d=n\ (n \geqq 9)$ で

$1=a<b=c<d$ または $1=a<b<c=d$ または $1<a=b<c=d$

をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$9k-5$	$n=12k+6$ のとき	$9k$
$n=12k+1$ のとき	$6k-3$	$n=12k+7$ のとき	$6k$
$n=12k+2$ のとき	$9k-3$	$n=12k+8$ のとき	$9k+1$
$n=12k+3$ のとき	$6k-1$	$n=12k+9$ のとき	$6k+2$
$n=12k+4$ のとき	$9k-3$	$n=12k+10$ のとき	$9k+2$
$n=12k+5$ のとき	$6k$	$n=12k+11$ のとき	$6k+3$

である.

補題６．11　$a+b+c+d=n\ (n \geqq 9)$ で

$1<a=b=c<d$ または $1<a<b=c=d$ または $1=a<b=c=d$

をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$4k-3$	$n=12k+6$ のとき	$4k$
$n=12k+1$ のとき	$4k-1$	$n=12k+7$ のとき	$4k+1$
$n=12k+2$ のとき	$4k-1$	$n=12k+8$ のとき	$4k$
$n=12k+3$ のとき	$4k-1$	$n=12k+9$ のとき	$4k+1$
$n=12k+4$ のとき	$4k-1$	$n=12k+10$ のとき	$4k+2$
$n=12k+5$ のとき	$4k$	$n=12k+11$ のとき	$4k+2$

である.

証明　x, h, h, h とする. h を決めると $x=n-3h \geqq 1$ が決まる. よって $1<h \leqq \frac{n-1}{3}$ すなわち $\left[\frac{n-1}{3}\right]-1=\left[\frac{n-4}{3}\right]$ とおりあるが, $x=h$ となるとき, すなわち $n=4h$ のときは１つ少なく数える. よって命題の結果を得る.

補題６．12　$a+b+c+d=n(n \geqq 9)$ かつ $1=a=b<c=d$ または $1=a=b<c<d$ をみたす自然数の組は, n が偶数のとき $\frac{n-4}{2}$, n が奇数のとき $\frac{n-5}{2}$ である.

上の２つの補題を合わせて

命題６．13　$a+b+c+d=n\ (n \geqq 9)$ で

$1<a=b=c<d$ または $1<a<b=c=d$ または $1=a<b=c=d$

または $1=a=b<c=d$ または $1=a=b<c<d$

をみたす自然数の組は

$n=12k$ のとき	$10k-5$	$n=12k+6$ のとき	$10k+1$
$n=12k+1$ のとき	$10k-3$	$n=12k+7$ のとき	$10k+2$
$n=12k+2$ のとき	$10k-2$	$n=12k+8$ のとき	$10k+2$
$n=12k+3$ のとき	$10k-2$	$n=12k+9$ のとき	$10k+3$
$n=12k+4$ のとき	$10k-1$	$n=12k+10$ のとき	$10k+5$
$n=12k+5$ のとき	$10k$	$n=12k+11$ のとき	$10k+5$

である.

７．まとめ

前の節で計算した値を, 命題５．１の１（系６．４）の12倍, ２（命題６．７）と３（系６．２）の６倍, ４（命題６．10）の４倍, ５（命題６．13）の２倍と６の場合の１倍を加えると次

の命題を得る．n が小さいときは具体的に入れてみると成立する．

定理７．１ $1, a, b, c, d,\ (a+b+c+d=n \geqq 5)$ で作られる合同でない五角形の種類は次の通りである．

$n=12k$ のとき	$144k^3-144k^2+62k-10$	$n=12k+6$ のとき	$144k^3+72k^2+26k+3$
$n=12k+1$ のとき	$144k^3-108k^2+38k-5$	$n=12k+7$ のとき	$144k^3+108k^2+38k+5$
$n=12k+2$ のとき	$144k^3-72k^2+26k-3$	$n=12k+8$ のとき	$144k^3+144k^2+62k+10$
$n=12k+3$ のとき	$144k^3-36k^2+14k-1$	$n=12k+9$ のとき	$144k^3+180k^2+86k+15$
$n=12k+4$ のとき	$144k^3-14k$	$n=12k+10$ のとき	$144k^3+216k^2+122k+25$
$n=12k+5$ のとき	$144k^3+36k^2+14k+1$	$n=12k+11$ のとき	$144k^3+252k^2+158k+35$

この結果を n に戻すとまとめて $n \geqq 5$ のとき，

$$g(n)=\begin{cases}\dfrac{n^3}{12}-n^2+\dfrac{62}{12}n-10 & (n\text{ が偶数のとき})\\[2ex] \dfrac{n^3}{12}-n^2+\dfrac{59}{12}n-9 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

となる．よって，$b_{n+1}=g(n)+b_{n-4}\ (n \geqq 5)$ より b_n を順に求めることができる．n の小さな値に対して少し計算してみると次のようである．

n	b_n	n	b_n	n	b_n	n	b_n	n	b_n	n	b_n
1	0	6	1	11	26	16	147	21	507	26	1298
2	0	7	3	12	38	17	196	22	621	27	1534
3	0	8	5	13	57	18	252	23	759	28	1794
4	0	9	11	14	80	19	325	24	914	29	2094
5	1	10	16	15	111	20	406	25	1096	30	2421