

ファジィ回帰分析モデルの検定とファジィ時系列分析モデルの同定手法（1）

勝木 太一

要 旨

本稿は、これまで開発されていなかったファジィ回帰分析モデルに、t 検定に対応する検定法、および、ファジィ回帰分析による推定結果のフィットネス指標（一致性指標）、ファジィ時系列分析モデルの同定手法について提案するものである。

実は、これまでのファジィ回帰分析の方法では、これらについて論じてこられなかったものであるが、本稿で採用した新しいファジィ回帰分析モデルにおいては、これまで構造的に不可能であった t 値に対応する指標の算定が可能となり、さらに、そのファジィ回帰分析の時系列分析モデルへの適用を進めるために、モデルの同定手法を開発し、これによりファジィシステムによる的確な時系列分析を可能とすることに成功した。

1：メンバーシップ関数

経済現象などの特定においてもっとも一般的に考えられるのは、その現象を如何に関数化するということであろう。この時、関数の推定値と現実値との差をどのように把握するかということが問題である。例えば、現実値がもつ様々な変動の要因を関数の説明変数で完全にフォローできないことはいうまでもないことであるが、その場合、現実値の変動のレンジを区間としてとらえる「区間解析」という手法は多くの点で意義のあるもので、その手法もすでに一定の評価を得ていることは周知のところである。

本稿では、その一つである「ファジィ回帰分析」について考察を進めることにしよう。

ファジィ回帰分析を適用する場合、どのようにファジィ数（ファジィ領域）を前提してモデリングするかが重要な問題であるが、ここでは、仮に、最も一般的に知られている「ピラミッドタイプ」の「メンバーシップ関数」を前提しておくことにしよう。

すなわち、回帰分析による関数を

$$\begin{aligned} y_j &= \sum A_i X_{ij} \\ &= A x' \end{aligned} \quad - (1)$$

$$A_j = a_i \pm c_{ij} \quad - (2)$$

のように考えた場合、ファジー数 A_j に対して、「メンバーシップ関数」は以下のように定義できるものとなる。

ファジー数で表された係数ベクトル A は、直積空間 (R^k) 上の直積集合として、

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \quad - (3)$$

$$\eta A(a) = \min(\eta A_j(a_j)) \quad - (4)$$

と定義し、

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

である。

このとき、 α_i はファジー数 A_i の中心を示し、 c_i を非負の実数とすれば、「メンバーシップ関数」は

$$\eta A_i(a_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha_i - a_i|}{c_i} & ; \alpha_i - c_i < a_i < \alpha_i + c_i \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases} \quad - (5)$$

と表せる。

これを (1) 式の係数ベクトル $A(=(a, c))$ について表記し直したとき、

$$\eta_{y_i}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|y_i - \alpha_i x'|}{c_i} & ; \\ \alpha_i x' - \sum c_i |x_{li}| < a_i < y_k < \alpha_i x' + \sum c_i |x_{li}| \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases} \quad - (6)$$

が得られる。

このように「メンバーシップ」関数を特定したとき、モデル推定値 (Y^e) の観測値 (Y) との適合性は

$$h_1 \cdot \sup \min \{ \eta_{Y\ell}(y), \eta_{Y^e\ell}(y) \}$$

とすることができ、これが「適合度」と呼ばれるものである。

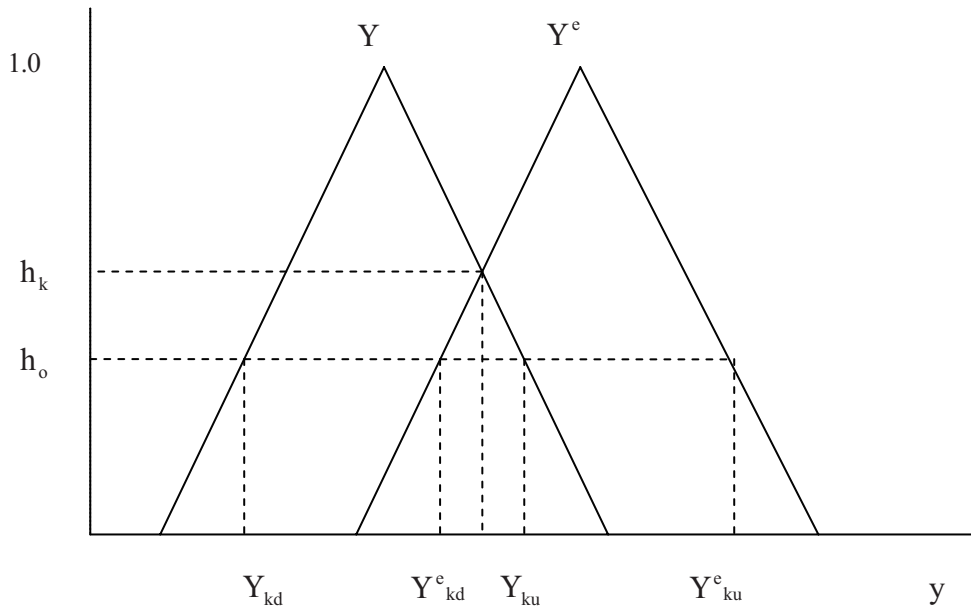
この適合度と推定値・観測値の関係を図示したものが「第1図」である。この図に示したように、適合度のレベルが推定値と観測値の両方のメンバーシップの一致する大きさを規定することになる。この意味で、「適合度」は確率モデルにおける「棄却率」のような意義を持つことになる。したがって、ファジィ推定の問題は、妥当な或一定の「適合度」のもとに、あいまいさを式に表現するならば

$$S \cdot \sum w_i c_i \quad (w_i : \text{各係数のウェイト})$$

を最小にすることであるということができるのである。

具体的には、上記のような「メンバーシップ関数」を設定して、「ファジィ回帰」を適用した場合、従属変数の各データ毎に「第1図」のような推定値と観測値についての図を描くことができる。その推定領域の妥当な範囲を一定の「適合度」の制約の下で最小の幅に設定したものが「ファジィ回帰」による「ファジィ領域」ということができるのである。

第1図



※ Y_{kd} : Y_k の下限 Y^e_{kd} : Y^e_k の下限

Y_{ku} : Y_k の上限 Y^e_{ku} : Y^e_k の上限

2 : ファジィ回帰分析の概略

この場合、説明変数のベクトルを

$$X_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \quad - (7)$$

とすると、

確率モデルでは

$$y_i = \sum a_j x_{ij} + u_i \quad - (8)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

として、 a_j を推定し、 x_{ij} で説明できる y_i の推定値と現実値(実績値)の誤差 u_i が確率過程に基づいているという仮定を行うのであり、誤差 u_i を最小とする(最小二乗法では $\sum u_i^2$ を最小とする) a を決定することが問題である。

「ファジィ回帰(可能性線形)モデル」は、「回帰分析」の問題点をクリアにするという目的で、行動のゆらぎを「確率過程」の問題として把握するのではなく、「ファジィ領域」の問題として捉えようというものである。

したがって、観測期間中に、説明変数のパラメータに変動がみられることをモデル化しようとする場合、

$$y_j = \sum A_j X_{ij} \quad - (9)$$

として、

$$A_j = a_j \pm c_j \quad - (10)$$

とするわけである。ここで A_j をファジィ係数として考えると、ファジィ回帰モデルの適用が可能となる。

これは、

$$y_j \leq a_j x_j + c_j |x_j| \quad - (11)$$

$$y_j \geq a_j x_j - c_j |x_j| \quad - (12)$$

という制約条件のもとに

$$\min \sum c_j |x_j| \quad - (13)$$

となる c_j を決定することによって最狭のファジィ域の推定を行うことができるものである。

したがって、この「ファジィ回帰分析」は、以下のような線形計画の問題に帰着させること

ができるのである。

$$\min \sum c_j |x_j| = J(c) \quad - (14)$$

subject to

$$y_j \leq a_j x_j + c_j |x_j| \quad - (15)$$

$$y_j \geq a_j x_j - c_j |x_j| \quad - (16)$$

$$c \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad - (17)$$

3：ファジィ回帰分析の新しい推定システム

実は、「時系列分析」の中心的命題はデータの定常性を仮定しているということができるものである。これについて、従来の「ファジィ回帰」が

$$Y_j = (a_j, c_j) X_j \quad - (18)$$

という式の推定、すなわち、 X のパラメータ a に $\pm c$ という巾を持たせるというものであった。この場合、 x の値が大きくなるにしたがって、ファジィ領域も相対的に増大するということになる。いわば、発散的になるということになるわけである。したがって、「定常性」の仮定を満たす条件としては、ファジィ領域も「定常的」でなければならないはずであり、そのためには、データに完全な定常性が求められることになる。

これは或意味では「ファジィモデリング」の考えと矛盾するものであり、現実のデータに仮定することが困難なものである。さらに、このようなパラメーターを前提した場合、「確率モデル」の「自己回帰モデル」における「確率過程」に対応する「ファジィ領域」推定は「自己回帰モデル」の次数が高くなるほど問題の多いものとなってくる。

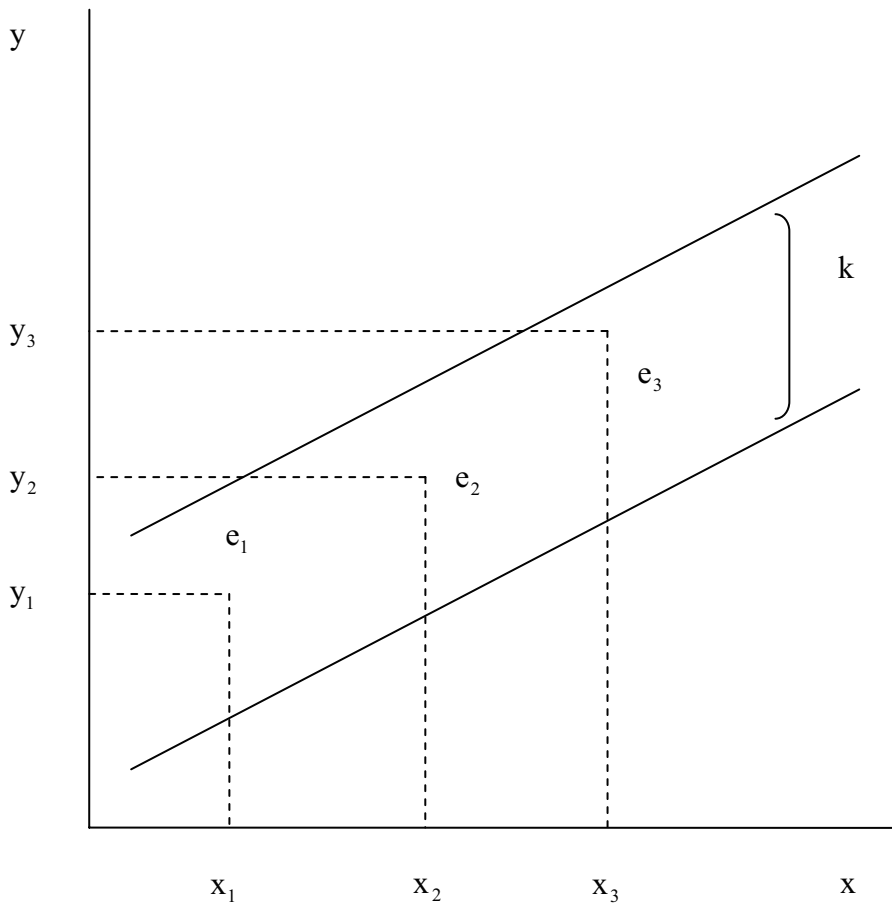
このような難点を克服するために、「システム全体」で1つの「ファジィ領域」が設定できるような—すなわち、パラメーター毎にファジィ領域が設定されるものでない推定方法が求められるところである。

このような「ファジィ推定」が可能となれば、例えば、トレンドの顕著なデータにおいてさえ「発散過程」を内含することなくモデル化することができるはずであり、データの循環的変動は「ゆらぎ」としてモデル化することができることになる。

このような「ファジィモデル」は、第2図にみられるような平行のファジィ領域をもつ、すなわち x の値が相対的に増大してもファジィ領域 (k) が相対的に増大しないようなものであることが必要である。

このような条件を満たした「ファジィ回帰モデル」の推定について述べることにしよう。

第2図



まず、上図に示したような「ファジィ領域」の推定を行う「ファジィ回帰システム」は以下のように定式化することができる。

「ファジィ関数」を

$$y_j = \sum (a_{ij} x_{ij} \pm c_{ij}) \quad - (19)$$

とすれば、各係数における $c_j x_j$ という「ファジィ推定」の拡散項がなくなり、「ファジィ域」は x_j が成長トレンドを示したとしても、定常的な領域を示すことになる。したがって、この(18)式を推定することができれば、上記の問題の多くが解消されることになるはずである。

この(19)式から

$$\left| y_j \left(1 + \sum \frac{c_{ij}}{y_{ij}} \right) \right| \leq \left| a_{ij} x_{ij} \right| \quad - (20)$$

ここで

$$\sum C_{ij} = \sum \frac{c_{ij}}{y_{ij}}$$

として、これを(20)式に代入すると

$$\left| (1 + \sum C_{ij}) \right| \leq \left| \sum a_{ij} \frac{x_{ij}}{y_{ij}} \right| \quad - (21)$$

を得る。

すなわち、推定の問題は

$$\min \sum C_j = J(C) \quad ; \quad C \geq 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

subject to

$$\left| (1 + \sum C_{ij}) \right| \leq \left| \sum a_{ij} \frac{x_{ij}}{y_{ij}} \right| \quad - (22)$$

となる。

このような、新しい「ファジィ回帰モデル」を「時系列分析」に適用するためには以下に示すように改めればよい。

$$x_{n-i} = \sum (a_j x_{n-i-j} \pm c_j) \quad ; \quad (j=1, \dots, n) \quad - (23)$$

$$\sum C_{ij} = \sum \frac{c_{ij}}{x_{n-i,j}}$$

とすると、

$$\min \sum C_j = J(C) \quad ; \quad C \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad - (24)$$

subject to

$$\left| (1 + \sum C_j) \right| \leq \left| \sum a_j \frac{x_{n-i-j}}{x_{n-l}} \right| \quad - (25)$$

という上の2式を解けばよい推定システムとなるのである。

また、この推定システムに「適合度」を導入することを考えた場合、次のように (25) 式を改めることができる。

$$\left| (1 + (1-h)\sum C_j) \right| \leq \left| \sum a_j \frac{x_{n-i-j}}{x_{n-l}} \right| \quad - (26)$$

さて、ファジィシステムによる関数推定は上記のようなファジィ回帰分析が一般的である。ここでは、第2節で述べた「これまでのファジィ回帰分析法」と、その改良型である第3節の「新しいファジィ回帰分析法」の推定の特性和その精度を数値例により確認し、「これまでのファジィ回帰分析法」の問題点と「新しいファジィ回帰分析法」のメリットを明らかにしよう。推定のために用意されたデータは以下の表のものである。

	名目賃金指数	求人倍率	消費者物価指数	GDP
	W	R e o	C P I	G D P
1970	18.5	1.6	32.5	73,344.9
1971	21.2	1.19	34.6	80,701.3
1972	24.6	1.57	36.3	92,394.4
1973	29.9	2.26	40.5	112,498.1
1974	38.0	1.14	49.9	134,243.8
1975	43.6	0.65	55.7	148,327.1
1976	49.1	0.72	61.0	166,573.3
1977	53.3	0.57	66.0	185,622.0
1978	56.7	0.63	68.8	204,404.1
1979	60.0	0.82	71.3	221,546.6
1980	63.8	0.77	76.9	240,175.9
1981	67.3	0.72	80.6	257,962.9
1982	70.1	0.59	82.9	270,600.7
1983	72.0	0.61	84.4	281,767.1
1984	74.6	0.66	86.3	300,543.0
1985	76.7	0.67	88.1	320,418.7
1986	78.7	0.61	88.6	335,457.2
1987	80.2	0.80	88.7	349,759.6
1988	83.0	1.16	89.3	373,973.2
1989	86.5	1.39	91.3	399,998.3
1990	90.6	1.51	94.1	430,039.8
1991	93.7	1.41	97.3	458,299.1
1992	95.4	1.02	98.9	471,020.7
1993	96.0	0.70	100.2	475,381.1
1994	97.7	0.66	100.8	479,260.1

1995	99.5	0.63	100.7	483,220.2
1996	101.0	0.74	100.8	500,309.7
1997	103.0	0.71	102.7	509,645.3
1998	101.7	0.49	103.3	498,499.3
1999	100.3	0.49	103.0	497,629
2000	100.0	0.64	102.2	502,990
2001	99.3	0.55	101.5	497,720
2002	96.4	0.56	100.6	491,312
2003	96.3	0.70	100.3	490,294

出典：www.stat.go.jp/data/chouki/index.htm の日本の長期統計系列

このデータから「回帰分析」による関数推定の結果は

$$W = -9.583 + 0.478\text{Reo} + 0.754\text{CPI} + 6.47\text{E-}05\text{GDP} \quad - (27)$$

$$(4.01) \quad (0.744) \quad (19.9) \quad (12.55)$$

$$R^2 = 0.998 \quad S = 1.1$$

※ Reo：有効求人倍率

CPI：消費者物価指数

GDP：国内総生産

※回帰分析の結果では Reo の t 値が有意でなく、関数推定としては再考しなければならないところであるが、ここではファジィ回帰分析との対比のため、あえて上式の関数型をあげておいた。

を得た。

これに対して「これまでのファジィ回帰分析法」では (14) から (17) 式にしたがって

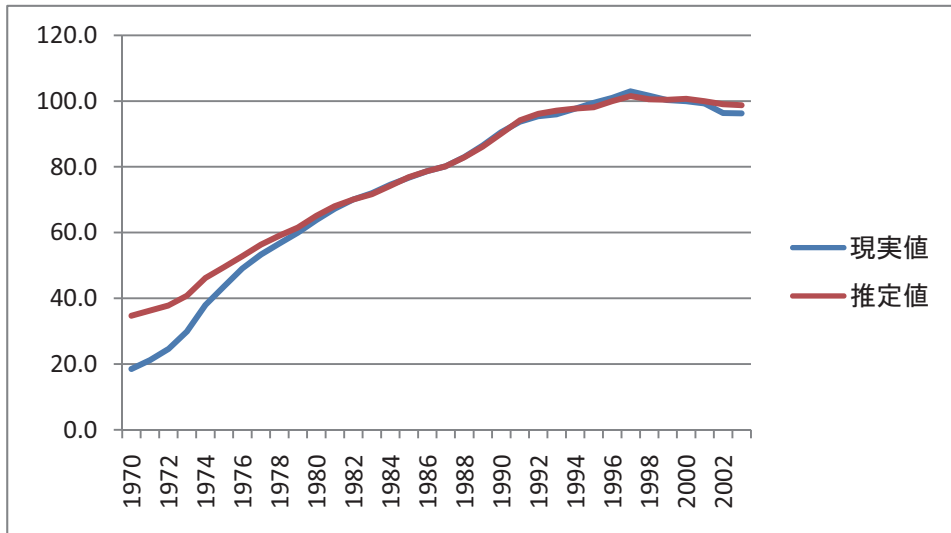
$$W = (-3.54291, 2.827245) \text{Reo} + (0.634354, -0.04944) \text{CPI} \\ + (7.43443\text{E-}05, 1.09\text{E-}05) \text{GDP} \quad - (28)$$

「新しいファジィ回帰分析法」によると (24) (25) の両式から

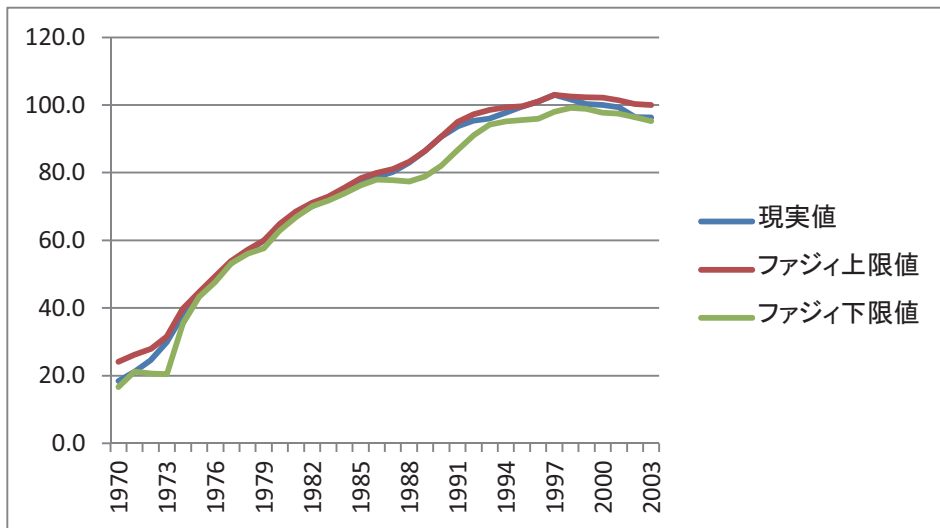
$$W = -1.91694\text{Reo} + 0.530631\text{CPI} + 9.5152\text{E-}05 \cdot \text{GDP} \pm 5.314615 \quad - (29)$$

という推定結果を得た。これらをグラフに示したものが「第3図」から「第5図」である。

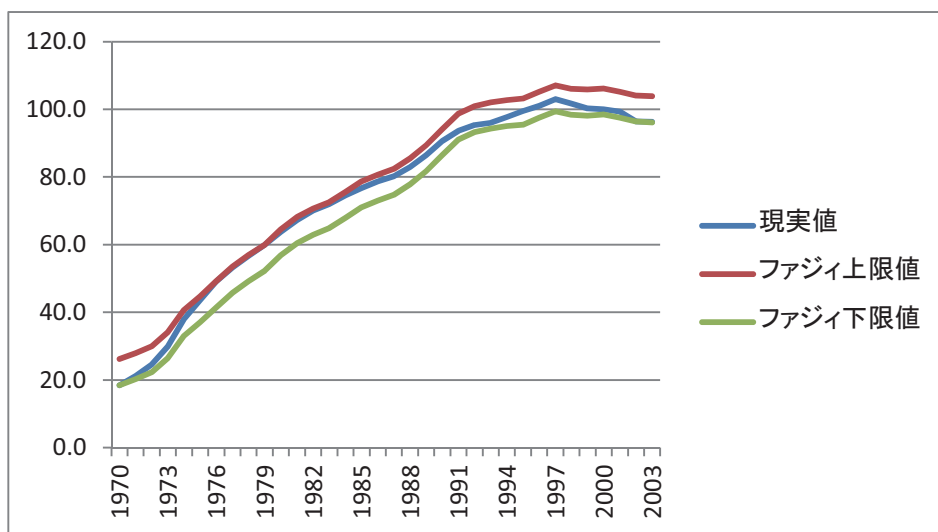
第3図：(27)式回帰分析の推定結果



第4図：(28)式「これまでのファジィ回帰分析」の推定結果



第5図：（29）式「新しいファジィ回帰分析」の推定結果



以上のグラフが示すように、いずれもかなりの上質なフィットネスを示している。ここで問題は、ファジィ回帰分析におけるフィットネスを示す指標がどのようなものであるかということであり、また各説明変数のパラメータの t 値に対応するような説明変数の説明力を示す指標がいかなるものであるかということである。

まず、フィットネスに対する指標であるが、これは以下のようにのべることができる。

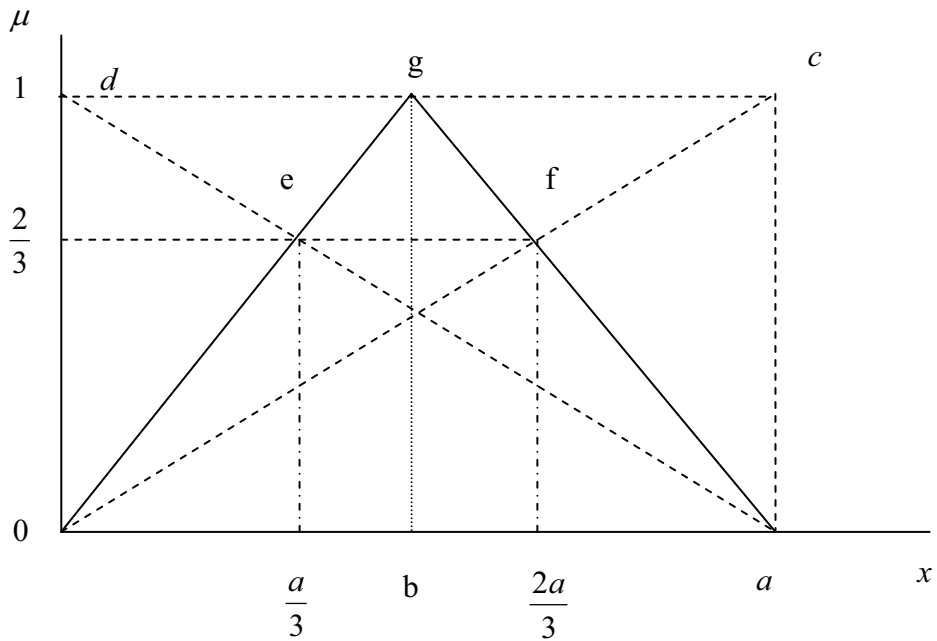
4：推定結果の検定

(推定値の偏差指標)

推定値が「現実値」に対してどれだけ一致しているかを示す指標として、確率モデルでは「決定係数」など非常に優れたものが知られている。ファジィシステムのような区間推定の場合、確率モデルに前提されているような「確率収束」にもとづいた指標をそのまま援用することに問題があることは言うまでもない。

そのため、まずファジィ偏差の算定について考えることにしよう。ファジィ推定結果の「メンバーシップ関数」は、第6図に示すように b を中心としたピラミッド型であるとしよう。このときファジィ域の全体は x 値の 0 から a の範囲である。三角形 $a-0-d$ はファジィ域下限の、三角形 $0-a-c$ はファジィ域の上限の可能性を示すものである。

第6図



したがって、ファジィ推定値の「メンバーシップ関数」の $0-g-a$ のピラミッド型の x 値の可能性分布から

$$\mu_l(\chi) = \frac{x}{b} \quad ; \quad x \leq b \quad - (30)$$

$$\mu_r(\chi) = \frac{a-x}{a-b} \quad ; \quad b \leq x \leq a \quad - (31)$$

と定義し、またファジィ下限の「メンバーシップ関数」を示す $0-d-a$ の $a-d$ の直線の方程式

$$\eta(x) = 1 - \frac{x}{a} \quad - (32)$$

から、

$$x = \frac{a}{3} \quad \mu_l(x) = \frac{2}{3}$$

$$x = a \quad \mu_1(x) = 0$$

を得ることができるが、これより、三角形 $0-g-a$ と直角三角形 $0-d-a$ の重なる領域を

$$\int_{x=0}^{\frac{a}{3}} \frac{2x}{a} dx + \int_{x=\frac{a}{3}}^a \frac{a-x}{a} dx \quad - (32)$$

のように算定することができる。これがファジィ下限域の(逆)偏差と考えることができる。すなわち、推定値の偏差はこの領域が大きいほど小さいということができる。また、この偏差については、推定ファジィエリアの x 値がしめす $0-a$ のレンジの大きさ(これは小さいほど良いと考えられる)と組み合わせて、ファジィ推定の適不適を判定する必要があるであろう。

さて、ファジィ上限の偏差についても、上述の手法と同様に、またファジィ上限の「メンバーシップ関数」を示す直角三角形 $0-c-a$ の $0-a$ の直線の方程式

$$\eta(x) = \frac{x}{a} \quad - (33)$$

と、(30) (31) 式から、

$$\begin{aligned} x = \frac{2}{3}a & \quad \mu_1(x) = \frac{2}{3} \\ x = a & \quad \mu_1(x) = 0 \end{aligned}$$

が得られる。

これより、

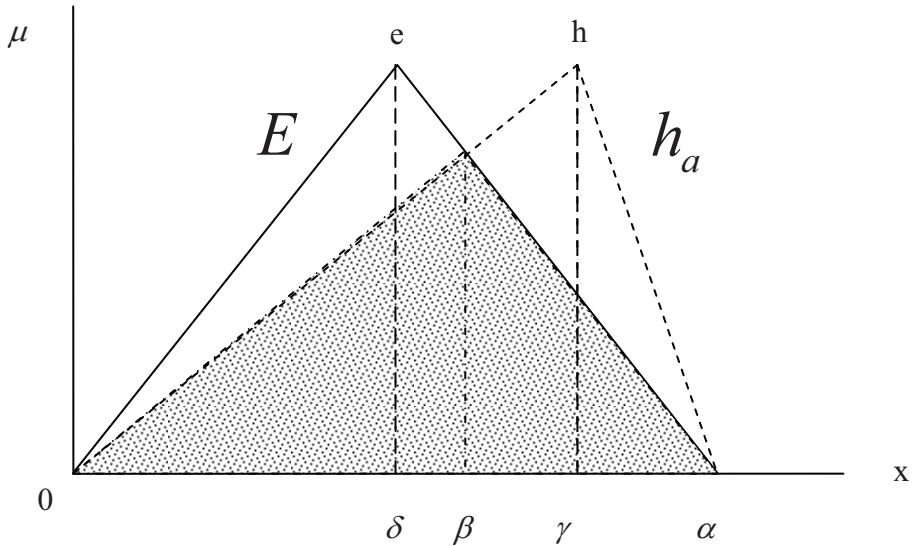
$$\int_{x=0}^{\frac{2a}{3}} \frac{x}{a} dx + \int_{x=\frac{2a}{3}}^a \frac{a-x}{a-b} dx \quad - (34)$$

これがファジィ下限域の(逆)偏差と考えることができる。

(一致性指標)

また、推定値と現実値のフィットネスの判定として、上記の「偏差の指標」を応用して以下のようなものを得ることができる。

第7図



第7図において $0-\delta-\alpha$ を底辺とするの実線の3角形をファジィ回帰分析によって推定された推定ファジィ域を示す「メンバーシップ関数」で、その中心値が δ とする。これに対して現実値 γ について上記のファジィ域を同じ幅と考え $0-\gamma-\alpha$ を底辺とする点線の三角形を現実値に対応した「メンバーシップ関数」であるとしよう。この2つの「メンバーシップ関数」が重なる領域が現実値と推定値のファジィ域が一致するところである。したがって、この面積が推定値の「メンバーシップ関数」に比べてどの程度の比率を示すかが推定値と現実値の一致性を示すものと考えることができる。

上記の一致性を示す領域の面積については、

三角形 $0-h-\alpha$ の斜辺を

$$h_a(x) = 1 \quad ; \quad x = \gamma \quad - (35)$$

$$= h_1(x) \quad ; \quad 0 \leq x < \gamma \quad - (36)$$

$$= h_r(x) \quad ; \gamma < x \leq \alpha \quad - (37)$$

と記し、三角形 $0 - e - \alpha$ の斜辺を

$$E(x) = 1 \quad ; x = \delta \quad - (38)$$

$$= E_l(x) \quad ; 0 \leq x < \delta \quad - (39)$$

$$= E_r(x) \quad ; \delta < x \leq \alpha \quad - (40)$$

を記すと、以下のように定義することができる。

$$\mu(x) = h_l(x) \quad ; 0 \leq x < \beta \quad - (41)$$

$$= E_r(x) \quad ; \beta < x \leq \alpha \quad - (42)$$

なお、ここで、

$$x = a$$

の場合は、

$$\mu_l(x) = 0$$

となる。

E と h_a の重なる面積は以下の式で計算される。

$$\int_{x=0}^{\beta} h_l(x) dx + \int_{x=\beta}^{\alpha} E_r(x) dx \quad - (43)$$

この面積の大きさと h の面積比率が一致性を示すものとなる。なお、 x 値の $0 \sim \alpha$ のレンジが標準偏差に対応するものである。

各現実値と推定値について (43) 式によってその一致性を算定し、その平均値を「一致性指標」とする。

これによって下式

$$W = (-3.54291, 2.827245) \text{Reo} + (0.634354, -0.04944) \text{CPI} \\ + (7.43443\text{E-}05, 1.09\text{E-}05) \text{GDP} \quad - (28)$$

の推定結果の「一致性指標」(ρ) を算定すると

$$\rho = 0.60307$$

が得られる。同様に、

$$W = -1.91694\text{Reo} + 0.530631\text{CPI} + 9.5152\text{E-}05 \cdot \text{GDP} \pm 5.314615 \quad - (29)$$

の「一致性指標」は

$$\rho = 0.60193$$

が得られる。

したがって、この関数型においては (14) ~ (17) 式によるファジィ回帰分析 (28) 式と (24) (25) の両式から推定される (29) 式とのフィットネスはこの指標の値に関する限りあまり差がないようである。このことは第 4 図と第 5 図を比べてみた場合にも言えるが、よく吟味した場合 (28) 式の結果はファジィ域がデータ値によって大きく相違したところがみられることに気がつくはずである。

また、ファジィエリア自体を考えると、第 5 図からも明らかなように (24) (25) の両式から推定される (29) 式のそれは観測期間全体を通じて一定であり、推定ファジィ域の安定性が確認されるものとなっている。

(t 値に対応する指標の計測法)

さらに、ファジィ回帰分析によって、関数を推定する場合「説明変数」の有効性を確認することは、確率モデルのケースと同様に重要なことである。しかし、(14) ~ (17) 式による旧来のファジィ回帰分析では説明変数のパラメータがファジィ変数として推定されているために一定の t 値の確定が困難である。

この点は、(24) (25) の両式から推定される回帰分析では、確率モデルのものと同様に t 値に対応する指標の計測が可能になっている。

この t 値 (ファジィ t 値) について以下に述べることにしよう。

$$y_t \subseteq a + bx_t \pm F \quad - (44)$$

という形で関数が推定されるとすると、

$$y_t - a - bx_t \subseteq \pm F$$

と書き換えることができる。ここで、

$$\sigma_F \subseteq \frac{\sum F}{n} \quad - (45)$$

とすれば

$$\sigma_{Fb} = \sqrt{\frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \sigma_F \quad - (46)$$

から

$$t = \frac{b}{\sigma_{Fb}} \quad - (47)$$

が得られる。

すなわち、この t 値に対応する指標の測定はファジィエリアの中心線と実測値の差から算定されるものとするものである。

先の推定例についてはそれぞれのファジィ回帰分析の係数を a1, a2, a3 と表記すると

a1	a2	a3	c1
-1.91694	0.530631	9.5152E-05	5.314615

であり、そのファジィ t 値は

a1 (t 値)	a2 (t 値)	a3 (t 値)
-0.84613	12.7778318	15.46292585

となっている。

なお、最小二乗法による t 値と対応させて t 値の有意性のない説明変数を削除した場合、

$$W = -8.408 + 0.737CPI + 6.66E-05GDP \quad - (48)$$

(4.01) (24.384) (14.85)

$R^2=0.998$ $S=1.1$

※カッコ内の数値は t 値を示す

となるが、上記のファジィ回帰の係数のファジィ t 値から、もっとも有意性のないとみられる説明変数を削除した結果は

a1	a2	a3	c1
--	0.422196	0.000117589	7.69187

となり、そのファジィ t 値は

a1	a2 (t 値)	a3 (t 値)
--	7.025	13.203

となる。この一致性指標は 0.632 に上がっている。

このことが示すように、ファジィ回帰分析においても説明変数の採否についての確な指標（ファジィ t 値）が重要なものであることは論を待たないところであろう。

5：時系列分析モデルの同定法

確率過程を前提とした時系列分析モデルを同定する手法としてはかなり多くの事例に基づいて確立されている。その代表的なものとして、「ボックス–ジェンキンス法」「AIC による判定手法」などがあげられる。ファジィシステムにおける時系列分析を実用的なものとして活用するためには、確率過程システムの時系列分析モデルと同程度の同定手法が求められるところであることは言を待たない。ここでは、ファジィシステムにおける時系列分析モデルの同定手法について述べることにしよう。

よく知られているように、「ボックス–ジェンキンス法」では、測定された「自己相関関数および偏自己相関関数」のラグが示すスパイクの状態によって、タイムラグの次数を決定する。このようなモデルを同定する手法がファジィシステムの時系列分析に見いだすことはファジィ時系列分析にも不可欠のものであろう。

a；ボックス–ジェンキンス法に相応するモデルの同定手法
時系列データを

$$(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-i})$$

のように記述して、これの各期の対前期比を

$$y_t = \left(\frac{Y_{t-1}}{Y_t} \right) \quad ; \quad Y < Y_{t-1}$$

$$y_t = \left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right) \quad ; \quad Y \geq Y_{t-1}$$

として

$$(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-i})$$

を例えばラグ 4 次のケースでは

しかし、データの動きを綿密にフォローするものではなく、データ水準の値がどれだけ近いものであるかということ云々するものということができる。

これに対して、データ値の変化の近似したものを確認することが求められるところである。この検定は、

Y_t の変化ないし増分値 ΔY_t の行列を求め、その時系列を比較し、その適合度によってモデルの同定の指標とすることも必要である。

いうまでもなく、これは変化・増分値の示すスパイクの適合性を確認するもので、一種の「偏相関」に似た意義を有すものと考えられるであろう。

$$\left(\begin{array}{cccc} \Delta Y_t, & \Delta Y_{t-1}, & \cdots, & \Delta Y_{t-4} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta Y_{t-1}, & \Delta Y_{t-2}, & \cdots, & \Delta Y_{t-4} \end{array} \right) \quad - (51)$$

具体的には、上記の行列式の第1行目と第2行目以降の適合性を確認することであり、その適合性の大きさによってモデルの同定作業の一助とする。

この場合、より比較を簡単にするために、 ΔY_t について簡単な点数をつけることもよいであろう（プラスのケースでは1、マイナスのケースでは-1、変化のない場合は0、さらにその変化の大きさによって数値に何段階かを設定してもよいであろう）。

また、これにより、時系列データの変動のスパイクの同質性を提示することができ、それによってデータ系列の動向の類似した系列の「可能性分布」を見出すことができるものとなる。当然、採択されるラグ演算子の有す系列は従属変数系列に最も一致性の高い系列ということになる。

このように、ファジィ時系列分析モデルにおけるモデルの同定は「結合可能性分布行列」から算定されたラグを有する時系列データと上記の「データの増分」などが示す時系列データのスパイクの形式がもっとも従属変数データのそれに近い物から選ばれることになる。

また、 Y_t の対前年比ないし増分値の行列を求め、そのファジィ集合から（ラフ集合）データ系列間の適合性を確認し、その集合の内部分割が可能である場合、いくつかのデータ系列の適合性の組み合わせを提示することができるようになる。このときに、援用できるのは「ラフ集合」の考え方である。

この手法によって、データ系列間の適合性が定義できるので、従属変数と説明変数の適合性、

および説明変数間の適合性の判定を算出し、それによって t 検定と同様の変数の検定を可能とするものとなる。

この検定手法は上記のようなファジィ行列を作成し、その行列因子を単純な得点のようなものに変換する。すなわち、

F	U	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄
	x ₁	1	0	-1	1
	x ₂	0	1	-1	1
	x ₃	-1	0	1	0
	x ₄	2	1	0	-1
	x ₅	1	1	0	0

のような結果が得られたとき、この行列の直和分割によって質的に類似した系列をカテゴリ-q_i ごとに得られることになる。この直和分割により、各系列の属性の同値関係を定義することが、ラフ集合の定義によって、近似の程度を算定することになる。

その定義の仕方は周知のように、

$$A^* = (X_i) = \{A^*(X_1), A^*(X_2), \dots, A^*(X_n)\} \quad - (52)$$

$$A_* = (X_i) = \{A_*(X_1), A_*(X_2), \dots, A_*(X_n)\} \quad - (53)$$

$$\alpha_A = \text{Card}(A_*(X_i)) / \text{Card}(A^*(X_i)) \quad - (54)$$

この値が 1 に近いほど両変数が近似空間に位置することになり、その変数データ間の動向の一致性が高いために、何らかの相関が考えられることになる。

したがって、変数が従属変数と独立変数であった場合にはその相関の程度によって説明力がある、ないしは有意であるということが判定できる。また、他方、独立変数同士の場合はその相関—ある種の系列相関が確認できるものとなる。

さらに、変数がどの属性 (Q) によって同値関係であるかということを考慮した場合、いくつかの直和分割が可能になり、その結果が変数データ間のいくつかのグループを形成するなら、このグループは同質の動向現象を有す変数であり、同時に同質の説明変数ともなり、また同質の説明変数によって説明されうるものであることが確認できるということになる。

以下に、この同定法の例を示すことにしよう。

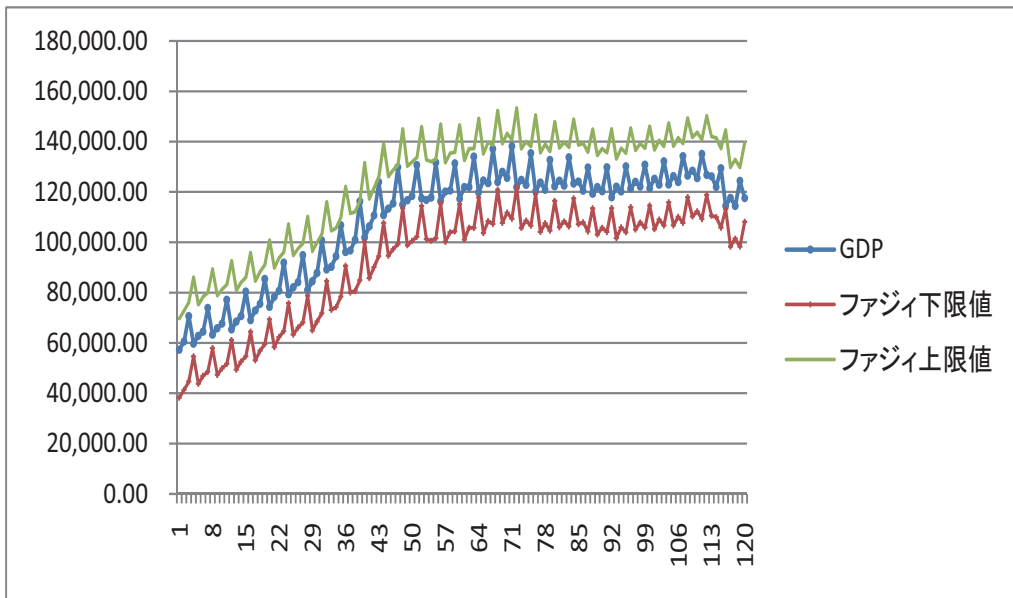
まず、推定に使用したデータは昭和 55 年の第 1 四半期から平成 22 年の第 1 四半期の GDP の 120 期の四半期データである。このデータについて自己回帰モデルを推定するにさいして上記の手法によりモデルを同定した結果、GDP を Y_t 、期を t と記すと

$$Y_t = 0.996Y_{t-1} \pm 15736.47$$

というモデルになった。

なお、この自己回帰モデルの推定は、旧来のファジィ回帰分析によって自己回帰分析を行うと、パラメータがファジィ変数として扱われるため時系列の期を経るにつれてファジィエリアが拡大するために、前述の (24) (25) 式によるファジィ回帰分析法を使用することにした。この結果をグラフに示したのが第 8 図である。

第 8 図



この時系列分析モデルの同定のための行列は、非常に大きなものであるために本論文においては、その掲載を割愛することにした。

また、ファジィ時系列分析モデルの同定についての詳細と、さらに、「単位根」検定については次回に譲ることとする。

参 考 文 献

- (1) 浅野喜代治・寺野寿郎・菅野道夫『ファジィシステム入門』, オーム社, 1987年,
chap.4,5,6,7
- (2) 石井、坂和、岩本, 『ファジィ OR』, 朝倉書店, 2001年.
- (3) 勝木太一「企業行動における意思決定構造の考察(その1)」, 『松阪政経研究』,
vol.12, No.1, 松阪大学, 1994年, pp.242-260.
- (4) 勝木太一「企業行動における意思決定構造の考察(その2)ーファジー回帰システムに
よる推計とその検証」, 『松阪政経研究』, vol.13, No.1,松阪大学, 1995年.
- (5) 勝木太一「企業行動における意思プロセスの考察ー投資行動についてのファジー回帰シ
ステムによる分析」, 『経済経営論叢』, vol.29, No.3, 京都産業大学, 1995年.
- (6) kaufmann A.・Gupta M. (松岡浩訳), 『ファジィ数理と応用』, オーム社, 1992年.
- (7) 杉原敏夫『経営・経済のための時系列分析と予測』, 税務経理協会, 1992年
- (8) 田中英夫『ファジィモデリングとその応用』, 朝倉書店, 1990年, pp.74-85, pp.134-159,
- (9) 中西健一・他6名『企業行動の多面的分析』, 晃洋書房, 1983年, chap.7-12
- (10) 西田耕三『企業行動科学の基礎』, 白桃書房, 1979年, pp.152
- (11) 新田、大滝、森、阪井共著, 『経済・経営時系列分析』, 白桃書房, 2001年.
- (12) 日本ファジィ学会編, 『講座ファジィ2 ファジィ集合』, 日本工業新聞社, 1992年.
- (13) 日本ファジィ学会編, 『講座ファジィ3 ファジィ測度』, 日本工業新聞社, 1993年.
- (14) 日本ファジィ学会編, 『講座ファジィ4 ファジィ論理』, 日本工業新聞社, 1993年.
- (15) 日本大学経済学研究会『現代企業の行動分析』, 頤草書房, 1989年, pp.3-15, pp.143-191
- (16) 和多田・田中・横山・浅居「ファジィ時系列モデルと予測問題への応用」, 『日本経営
工学会誌』, Vol.34, No.3. 1983年
- (17) Arfi Badredine, *Linguistic Fuzzy Logic Methods in Social Sciences*, Springer,Berlin,2010.
- (18) R.E.Bellmann & L.H.Zadeh, “Decision Making in a Fuzzy Environment” , *Management
Sci.*,17,1970, pp.141-164.
- (19) Tru Hoang Cao, *Conceptual Graghs and Fuzzy Logic*, Springer,Berlin,2010.
- (20) R.M.Cyert & March, J.G., *A Behavioral Theory of Firm*,1963, chap.3-5.
- (21) D.Dubois, “Linear Programming with Fuzzy Data” , in J.C.Bezdek Ed., *Analysis of Fuzzy
Infomation* Vol.3,CRC Press 1987,pp.241-263.
- (22) D.Dubois & H. Prade, “TWO FUZZY SETS AND ROUGH SETS-SOME ISSUES IN K N O
WLEDGE REPRESENTATION” , *Fuzzy Sets and Systems*23,North-Hollnd,1987.
- (23) Zdzislaw Pawlak, “Rough Sets” , *International Journal and Information Sciencas*,
Vol.11,No.5., 1982.
- (24) A. Weldon & J.Kacprzy, *Fuzzy Optimization*, Springer,Berlin,2010.

- (25) H.J.Zimmermann, “Description and Optimization of Fuzzy Systems” , *Journal of General Systems*, 2, 1976, pp.209-215.
- (26) H.J.Zimmermann, “Fuzzy programming and linear programming with several objective Function” , *Fuzzy Sets and System*, 1, 1978, pp.45-56