Rudin-Carleson の定理について

加　藤　政壽美

On a theorem of Rudin-Carleson

MASASUMI KATO

ABSTRACT

Let C be the class of all functions which are analytic in D: $|z|<1$ and continuous on $\bar{D}$: $|z|\leqq 1$, and E be a non-void closed set of Lebesgue measure zero on γ: $|z|=1$.

Then, in §1 of this note, we shall prove the following.

Lemma. For any open (considered on γ) set O such that $E\subset O\subsetneqq\gamma$ and for any $\eta>0$, there exists a function $g(z)\in C$ satisfying the conditions

(i) $g=1$ on E, (ii) $|g|<\eta$ on γ-O, and (iii) $|g(z)|<1$ in D.

In §2, by combining the above lemma with the generalized Runge's theorem [1], we shall give a simple proof for a theorem due to Rudin [2] and Carleson [3]. In §3, by using the above Rudin-Carleson's theorem, we shall give a new proof of the well-known F. and M. Riesz's theorem.

§1．γ-E は高々可算個の開円弧 γ_j から成り，その長さ σ_j の総和 $\sum_j\sigma_j=2\pi$ である。γ_j が有限個のときは g(z)の構成が容易だから，以下 γ_j は可算無限個あるとする。

このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し，自然数から成る単調非減少列 $\{c_j\}_1^\infty$ で，$c_j\to\infty\,(j\to\infty)$ かつ $\sum_j c_j\sigma_j<2\pi+\varepsilon$ をみたすものがある。

実際，部分和 $\sigma^*_n=\sum_l^n\sigma_j$ の列は増大しながら 2π に近づくから，その部分列 $\{\sigma^*_{n_k}\}$ ($n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$) で $2\pi-\varepsilon\cdot 4^{-k}<\sigma^*_{n_k}$ (k＝1，2，…)をみたすものがある，そこで

$$c_j = \begin{cases} 1 & (j \leqq n_1) \\ 2^k & (n_k < j \leqq n_{k+1}) \end{cases}$$

とおくと，$c_j \to \infty\ (j \to \infty)$ かつ

$$\sum_1^\infty c_j \sigma_j = \sigma^*_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty 2^k (\sigma^*_{n_{k+1}} - \sigma^*_{n_k}) < 2\pi + \varepsilon \sum_1^\infty 2^{-k} = 2\pi + \varepsilon.$$

以後，例えば $\varepsilon = 1$ に対応する上記$\{c_j\}$を１つ固定し，またγ_jの端点をe^{ia_j}, e^{ib_j} $(0 < b_j - a_j < 2\pi)$で表し，各 j に対して

$$h_j(\theta) = c_j - \log \sin \pi(\theta - a_j)/\sigma_j \quad (e^{i\theta} \in \gamma_j)$$

とおくと，γ_j 上で正値かつ解析的で，更に周知の公式

$$\int_0^\pi \log \sin\theta d\theta = -\pi \log 2$$

より$\sum_j \int_{\gamma_j} h_j(\theta)\, d\theta = \sum_j \sigma_j (c_j + \log 2) < +\infty.$

ゆえに，γ 上で $h(\theta) = h_j(\theta)\ (e^{i\theta} \in \gamma_j), h(\theta) = +\infty\ (e^{i\theta} \in E)$ とおくと正値，可積で各 γ_j 上では解析的である，更に任意の $N > 0$ に対して $h^{[N]}(\theta) = \mathrm{Min}(h(\theta), N)$ は γ 上で正値連続かつ$N \to \infty$ のとき増加しながら$h(\theta)$に近づくから，そのポアソン積分 $u_N(z)$ は D 内で増加しながら $h(\theta)$のポアソン積分 $u(z)$に近づく。

ゆえに任意に１点 $e^{i\theta_0} \in E$ を固定するとき。$h^{[N]}(\theta_0) = N$ だから Schwarz の古典的な定理により $e^{i\theta_0}$ のある開近傍 U_N を見出して，すべての $z \in V_N = D \cap U_N$ に対して $u_N(z) > N/2$ をみたすように出来る。したがって $u(z) \geqq u_N(z) > N/2$ inV_N より $u(z)$は$e^{i\theta_0}$ で境界値$+\infty$をもち，更に $u(z)$の D での共役調和関数を１つ固定して $v(z)$ とすると，各 γ_j を越えて $u(z)$ は調和延長され得るから $v(z)$ も同様である。

そこでDで正則な $w(z) = u(z) + iv(z)$ と$M > 0$ に対して

$$g_M(z) = w(z)/(w(z) + M)$$

は $|g_M(z)| < 1$ in D かつ $g_M(z) = \left(1 + \dfrac{M}{w(z)}\right)^{-1}$より E の各点で境界値１をとるから E 上で $g_M = 1$ と定義すれば$\overline{D}$で連続になる。ゆえに0と η に対して M を十分大きくとれば補題の g が得られる。

§2　はじめに次の初等的な補題を証明しよう。

補題。 数値線 R_1 上のコムパクト集合 E が内点をもたない(すなわち E の内部$\mathring{E}=\phi$)とする。このとき任意の $\delta>0$ に対し，E の有限点列 $a_1\leqq b_1<a_2\leqq b_2<\cdots<a_k\leqq b_k$ で $b_j-a_j<2\delta(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ かつ$\sum_{j=1}^{k}\ [a_j,b_j]\supset E$ をみたすものがある。

実際，Borel-Lebesgue の被覆定理より，E の有限点列$x_1<x_2<\cdots<x_n$で，各 x_j を中心とする巾 2δ の開区間U_jの和で E を被い得る。

ところが，$0<x_2-x_1\leqq\delta$ か $\delta<x_2-x_1<2\delta$ かに従って，それぞれ開区間(x_1,x_2)，$(x_2-\delta,\ x_1+\delta)$を$\mathring{J}$とすると$\mathring{J}\subset U_1\cap U_2$かつ$\mathring{E}=\phi$ より $\mathring{J}$ 内に E に属さぬ点 x_{12}^* がある。そこで

$$b_1=\mathrm{Max}(E\cap(-\infty,x_{12}^*)),\quad a_2=\mathrm{Min}(E\cap(x_{12}^*,\infty))$$

とおくと $x_1\leqq b_1<a_2\leqq x_2$。

一方，$2\delta\leqq x_2-x_1$ のときは，E に属さぬ点として $x_1^*=x_1+\delta, x_2^*=x_2-\delta$ をとり $b_1=\mathrm{Max}(E\cap(-\infty,x_1^*))$，$a_2=\mathrm{Min}(E\cap(x_2^*,\infty))$ をとればよい。以下，この方法をU_2とU_3，…，U_{n-1}とU_nの間に続け，最後に $a_1=\mathrm{Min}\ E, b_K=\mathrm{Max}\ E$ とすると所期の点列が得られる。

はじめの記号に戻って，E を γ 上の空でない閉集合でルベーグ測度 $|E|=0$ とし，E 上に複素数値連続関数 φ を与えたとする。

このとき E が1次元集合として内点をもたないことと，φの一様連続性より，任意の$\varepsilon>0$に対し，上記補題によって，E を互いに素な閉集合 $E_j(j=1,\cdots,k)$に分割して各 E_j 上での φ の振動量が $\varepsilon/2$ より小さく，しかも各E_j を単連結な Jordan 領域G_j で被い，$\overline{G}_i\cap\overline{G}_j=\phi(i\neq j)$であるように出来る。

そこで各 E_j から1点 z_j を選んで固定し，閉集合 $\sum_{j=1}^{k} G_j$上の“正則関数” $\varphi_\varepsilon(z)$を $\varphi_\varepsilon(z)=\varphi(z_j)\ \mathrm{in}\ G_j$ と定義すれば，古典的な Runge の定理の拡張によって

$$|P(z)-\varphi(z_j)|<\ \varepsilon/2\ \ \text{on}\ E_j\ (j=1,\cdots,k)$$

をみたす多項式がある。

ゆえに，一般に，E 上で連続な φ にノルム $\|\varphi\|=\underset{E}{\mathrm{Max}}|\varphi|$ を与えて生ずる Banach 空間を B とするとき，先に導入した $f(z)\in C$ の E への制限の全体 B^*が B の中で稠密になる。

一方，$\psi\in B^*$に対し，E への制限が ψ に等しい $f\in C$ 全てに亙っての

$$\inf_f(\underset{\gamma}{\mathrm{Max}}|f|)$$

を ψ の新しいノルム $\|\psi\|^*$とすると，明らかに $\|\psi\|^* \geqq \|\psi\|$ かつ $\| \ \|^*$ に関して B^* が完備になる。

逆に $\|\psi\|^* \leqq \|\psi\|$ の成り立つことを示すために，$\psi \in B^*$(ただし $\psi \neq 0$ とする)を与える $f \in C$ を１つ固定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，γ 上での f の連続性から $|f(e^{i\theta})| < (1+\varepsilon)\|\psi\|$ on O をみたす開集合 $O \supset E$ があるが，$O = \gamma$ なら既に $\|\psi\|^* \leqq \|\psi\|$ だから，$O \subsetneqq \gamma$ としてよい。そこで更に $\underset{\gamma - 0}{\mathrm{Max}}|f| < \eta^{-1}(1+\varepsilon)\|\psi\|$ が成り立つように $\eta > 0$ をとり，このOと η に対する補題の $g(z)$ を使って $f(z)\cdot g(z) = F(z) \in C$ とおくと，$F = \psi$ onE, $|F| < (1+\varepsilon)\|\psi\|$ on γ より $\|\psi\|^* \leqq (1+\varepsilon)\|\psi\|$，すなわち $\|\psi\|^* = \|\psi\|$ をうる。$\psi = 0$ のときも等号の成り立つことは明らか。

以上の，準備の後，次の

Rudin-Carleson の定理， E 上に与えられたどの連続関数 φ も適当な $f \in C$ の E上への制限に等しい，すなわち B^*は B と一致する

を簡単に証明しうる。

それには B^*が B のノルムで閉じていることを云えばよいから，今，B^*の列 $\{\psi_j\}_1^\infty$ が B のノルムで $\psi_j \to \varphi \in B (j \to \infty)$ とする。このとき $\{\psi_j\}$ は $\| \ \|^*$ に関してもコーシー列だから，部分列 $\{\psi_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ を選んで $\|\psi_{j_{k+1}} - \psi_{j_k}\|^* < 2^{-k} (k=1,\ 2\cdots)$ と出来る。ゆえに各 k について E への制限 $= \varphi_{j_{k+1}} - \varphi_{j_k}$ となる $f_k \in C$ で $\underset{\gamma}{\mathrm{Max}}|f_k| < 2^{-k}$ となるものがあり，$\sum_{R} f_k = f$ とおくと $f \in C$ かつ E への制限 $= \varphi - \psi_{j_1}$ だから $\varphi \in B^*$。

§3　先の結果から，Hardy class H_1を経由しないで，analytic measure に関する著名な F. and M. Riesz の定理を直接示しうる。この定理の述べ方はいろいろあるが，初等関数論の立場から次の形を取ろう。すなわち

F. and M. Riesz の定理， $w = F(z) \in C$ による γ の像曲線 Γ の長さが有限であれば，γ 上の零集合はΓ上の弧長で計った零集合に写される(cf. [4]).

証明。　$F(z)$の境界関数 $F(e^{i\theta})$を $F(\theta)$ と略記すると，仮定から $F(\theta)$は区間 $[0,\ 2\pi]$ で有界変分である。一方，ポアソン積分

$F(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,\dfrac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\cdot F(\theta)\,d\theta = \sum_0^a a_n z^n + \sum_1^a b_n \bar{z}^n$ (ここで $b_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{in\theta}F(\theta)\,d\theta$)が z に関して D で解析的だから $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{in\theta}F(\theta)\,d\theta = 0$ $(n=1,\ 2\cdots)$だが，$F(\theta)$の周期性のため　部分積分で $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,dF(\theta) = 0$ $(n=0,\ 1,\ 2\cdots)$をうる。ゆえにまた，class C の関数 $f(z)$は $\bar{D}$で多項式列による一様近似が可能だから，$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\,dF(\theta) = \int_\gamma f(\theta)\,dF^*(\theta) = 0$　(ここで F^* は F から導かれる複素数値 Borel 測度を表す([5]，1))が成り立つ。

そこでまず F* したがって F のルベーグ測度に関する絶対連続性を示すために，F*の Borel 集合 e 上の全変分を $W^*(e)$ とするとき，$|E|=0$ である Borel 集合 E に対して $\int_E dW^*=0$ を云えばよいが，§2の結果を使うためにまず E を closed としよう。

このとき $\|\varphi\|\leqq 1$ の各 $\varphi\in B$ に対し，$B=B^*$ より，E への制限が φ に等しい $f_\varphi\in C$ で $\underset{\gamma}{\mathrm{Max}}|f_\varphi|\leqq$ const.（例えば2としてよい）をみたすものがある。一方，正の測度 dW^* の正則性のため，任意の $\eta>0$ に対して $E\subset 0\subsetneqq\gamma$ かつ $\int_{0-E}dW^*<\eta$ となる開集合Oがあるから，このOと η に対する補題の $g(z)$ を使うと

$$0=\int_\gamma f_\varphi\cdot g\,d\,F^*=\int_E\varphi\,d\,F^*+\left\{\int_{O-E}+\int_{\gamma-O}\right\}f_\varphi\cdot g\,d\,F^*$$

$$\therefore\left|\int_E\varphi\,d\,F^*\right|\leqq 2\int_{O-E}dW^*+2\eta\int_{\gamma-O}d\,W^*=O(\eta).$$

（ここで最後の $O(\eta)$ は Landau 記号）

したがって F^* からきまる Banach 空間 B 上の線型汎関数のノルムを与える

$\int_E dW^*=\sup_{\substack{\varphi\in B\\ \|\varphi\|\leqq 1}}\left|\int_E\varphi dF^*\right|=0$ が得られる(cf, [6]).

E が closed でなくても，同じく $d\,W^*$ の正則性のため任意の $\varepsilon>0$ に対して $\int_{E-e}d\,W^*<\varepsilon$ をみたす閉集合 $e\subset E$ があるから，$\int_E dW^*=0$ を得て F の絶対連続性が示された。

ゆえにまた，Tonelli の定理([5]，2)より像曲線 Γ の長さが $\int_0^{2\pi}|F'(\theta)|\,d\,\theta$ で与えられるから，証明が終わる。

REFERENCE

[1] H. Behnke und F. Sommner. Theorie der analytischen Fuuktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer (1962) P. 263

[2] W. Rudin. Boundary values of continuous analytic functions. Proc. A. M. S. 7 (1956) P. 808-811

[3] L. Carleson. Representations of continuous. functions. Math. Zeit. 66 (1957) P. 447-451

[4] M. Tsuji. Potential theory in modern function theory. MARUZEN (1959) P. 318-319

[5] S. Saks. Theory of the Integral. Warszawa (1937) (1) P.64 (2) P.123

[6] S. Banach. Théorie des opérations linéaires. Warszawa (1932) P.59-61