# 上半空間での正値調和関数について

加　藤　政 壽 美

# On positive harmonic functions in the upper half space

**Masasumi Kato**


## ABSTRACT

In the n(≧2)−dimensional Euclidean $(\xi)=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ space, let $v(\xi)$ be a positive harmonic function in the upper half space G : $\xi_n>0$ and H be the boundary of G, that is, the hyperplane $\xi_n=0$. Then, denoting by $\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}, 0)$ the points of the plane H, there exists a non-negative mass distribution $\nu$ in H and a constant c≧0 such that

$$\nu(\xi)=\frac{2}{\omega_n}\int_H \frac{\xi_n}{|\xi-\eta|^n}\,d\nu(\eta)+c\xi_n \qquad in\ G \tag{$*$}$$

where $\omega_n=2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ denotes the surface area of the unit sphere $\sum_i \xi_i^2=1$ ([1], (1)).

In this note, we shall present, in §3, a new proof of the above formula (∗), which is entirely different from the original proof and seems to be more simple and more natural as compared with the original one. Moreover, as its application, we shall give, in §5, a extremely brief proof for the classical but epoch-making Fatou's theorem in the theory of analytic functions and, by means of the real function-theoretic arguments, we shall give, in §6, a delicate variant of the Reflection Principle due to H. A. Schwarz. The first two sections 1 and 2 give the prelimiaries for the following treatments.


Keyword : Kelvin transformation　　　　Received Apr. 23 1997

§1　ユークリッド空間 $R_n$ の2点またはベクトル $x=(x_1\cdots, x_n)$, $y=(y_1, \cdots, y_n)$ 及び実数

$\alpha, \beta$ に対し $\alpha x+\beta y$ で $(\cdots, \alpha x_i+\beta y_i, \cdots)$ を，また $(\sum_i x_i^2)^{1/2}$を $|x|$，$\sum_i x_i y_i$ を $x\cdot y$ または $\langle x, y\rangle$で表す。

次に，点 $a=(a_1, \cdots, a_n)$ を中心，半径 $R$ の球面 $\Sigma$ を１つ固定し，$a$ とは異なる点 $x$ に対して半直線 $\overrightarrow{ax}$ 上にあって関係 $|x-a|\cdot|x^*-a|=R^2$ をみたす点 $x^*$ を $\Sigma$ に関する $x$ のケルビン変換または鏡像という［２］。したがって定義から次が成り立つ。

$$x^*=a+\frac{R^2}{|x-a|^2}(x-a),\ (x^*)^*=x \tag{1}$$

また同じく，中心 $a$ を含まない集合 $E$ で定義された関数 $u$ に対し，$\Sigma$ に関する $E$ の鏡像 $E^*$ で定義される関数

$$v(x)=\left(\frac{R}{|x-a|}\right)^{n-2}u(x^*) \tag{2}$$

を $u$ の鏡像というが，特に $E$ が開集合で，$u$ が $E$ で調和なら $v$ も $E^*$ で調和になる。

実際，平行移動と相似変換で調和性は保たれるから，$a=0, R=1$ としてよく，

$$r(x)=r^{2-n}u\left(\frac{x_1}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right),\ r=|x|$$

は $u(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ と $\xi_k=\dfrac{x_k}{r_2}(k=1, \cdots, n)$ の合成関数に $r^{2-n}$を乗じたものだから

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}r^{2-n}\right)\cdot u+2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}r^{2-n}\right)\sum_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$$

$$+r^{2-n}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}+\sum_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k^2}\right)$$

ところが，ラプラシアン $\Delta_x=\sum_k\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ に対し $\Delta_x r^{2-n}=0$，

$$\sum_k\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}=\frac{1}{r^4}\delta_{ij}\ (\delta_{ij}\text{ はクロネッカー delta}),$$

$$\sum_k\left(\frac{\partial}{\partial x_k}r^{2-n}\right)\left(\sum_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right)=\sum_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\left(\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}r^{2-n}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right)$$

$$=\frac{n-2}{r^{n+2}}\sum_i x_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i},$$

一方，$r^{2-n}\sum_i\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}\Delta_x \xi_i=-\dfrac{n-2}{r^{n+2}}\sum_i x_i\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}$,

したがって，$\Delta_x v=\dfrac{1}{r^{n+2}}\Delta_\xi u$ を得るからである。

§２　点 $a=(0, \cdots, 0, -1)$ を中心，半径 $R=1$ の球面 $\Sigma$ に関する上半空間 $G$ の鏡像 $G^*$ は中心が点 $b=\left(0, \cdots, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$の球面 $S$ の内部になり，また $H$ の像は

$S$ から点 $a$ を除いた面 $\mathring{S}=S-\{a\}$になる。以後，この変換を固定するから『$\Sigma$ に関する』を省くことにする。

さて，任意の 2 点 $x\in G^*$, $\sigma\in\mathring{S}$ の像をそれぞれ $\xi$, $\eta$ で表すと，(1)より，$|x-b|=\rho$ と置いて

$$\frac{1}{4}-\rho^2=\frac{\xi_n}{|\xi-a|^2},\quad |x-\sigma|=\frac{|\xi-\eta|}{|\xi-a|\cdot|\eta-a|} \tag{3}$$

一方，点 $b$ のまわりの回転で不変な $S$ の面積素 $dS(\sigma)$ を H の面積素 $d\eta=d\eta_1\cdots d\eta_{n-1}$ で表すために，$(\eta_1, \cdots, \eta_{n-1})$ を $\mathring{S}$ の曲線座標とみて，$\mathring{S}$ の線素 $ds$ の平方を

$$(ds)^2=\sum_1^n (d\sigma_k)^2=\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}\, d\eta_i\, d\eta_j$$

と置いたとき

$$dS(\sigma)=\sqrt{g}\,d\eta_1\cdots d\eta_{n-1},\quad g=det(g_{ij})$$

だから，$g_{ij}$ を求めればよい。

ベクトル $\overrightarrow{a\eta}=\vec{r}$, $|\vec{r}|=r$, $\dfrac{\partial r}{\partial\eta_i}=r_i$ と置き

$$\sigma=\eta^*=a+\frac{1}{|\eta-a|^2}(\eta-a)=a+\frac{1}{r^2}\vec{r}$$

の両辺の微分（differential）を取って

$$d\sigma=d\left(\frac{1}{r^2}\vec{r}\right)=\sum_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial\eta_i}\left(\frac{1}{r^2}\vec{r}\right)d\eta_i$$

$$\therefore\quad (ds)^2=d\sigma\cdot d\sigma=\sum_{i,j=1}^{n-1}<\frac{\partial}{\partial\eta_i}\left(\frac{1}{r^2}\vec{r}\right),\ \frac{\partial}{\partial\eta_j}\frac{1}{r^2}\vec{r}\Big)>d\eta_i d\eta_j.$$

ところが $\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2$ の両辺を微分して

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta_i}\vec{r}\right)\cdot\vec{r}=r\frac{\partial}{\partial\eta_i}r=rr_i,\quad \text{及び}<\frac{\partial}{\partial\eta_i}\vec{r},\ \frac{\partial}{\partial\eta_j}\vec{r}>=\delta_{ij}$$

$$\therefore\quad g_{ij}=\delta_{ij}\cdot r^{-4},\quad \sqrt{g}=r^{-2(n-1)}$$

すなわち $$dS(\sigma)=\frac{1}{|\eta-a|^{2(n-1)}}d\eta_1\cdots d\eta_{n-1} \tag{4}$$

(4)の 1 例として $S$ の表面積 $|S|$ を求める。$|\eta|=t$ と置き，記号 $\Gamma$, $B$ はそれぞれ *Gamma* 関数，*Beta* 関数を表すとして

$$|S|=\int_H\frac{d\eta}{|\eta-a|^{2(n-1)}}=\omega_{n-1}\int_0^\infty\frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{n-1}}dt=\omega_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}B\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\omega_n$$

§3　$G$ で正値調和な $v(\xi)$ を，自明な場合を除けば，最大値の原理によって，はじめから $G$ 内いたる所 $v(\xi)>0$ と仮定してよい。$v(\xi)$ の鏡像 $u(x)$ は $S$ の内部 $G^*$ で正値調和だから，Frostman の選出原理（[1]，(2)）でコムパクト集合 $S$ 上での正の質量分布 $\mu$ を見出して

$$u(x)=\frac{2}{\omega_n}\int_S\frac{\frac{1}{4}-\rho^2}{|x-\sigma|^n}\,d\mu(\sigma)\qquad in\ G^* \tag{5}$$

と表される。ここで $b$ の像 $b^*=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$ での $v$ の値を使って，全質量 $\mu(S)$ は $\frac{1}{2}\omega_n v(b^*)$ に等しい。

(5)の積分を

$$u(x)=\frac{2}{\omega_n}\left\{\int_{\mathring{S}}+\int_{\{a\}}\right\}\frac{\frac{1}{4}-\rho^2}{|x-\sigma|^n}\,d\mu(\sigma)$$

に分けると，後者は(3)より

$$u_a(x)=\frac{2}{\omega_n}\frac{\frac{1}{4}-\rho^2}{|x-a|^n}\mu(\{a\})=\frac{2}{\omega_n}\mu(\{a\})\frac{\xi_n}{|x-a|^{n-2}}=c\cdot\frac{\xi_n}{|x-a|^{n-2}}$$

$$ここで\ c=\frac{2}{\omega_n}\mu(\{a\})\geqq 0,$$

すなわち，$u_a(x)$ は $G$ で正値調和な $\xi_n$ のケルビン像に定数 $c$ を乗じたものに他ならない。

そこで $v(\xi)$ に戻せば

$$\begin{aligned}v(\xi)&=\frac{1}{|\xi-a|^{n-2}}\cdot\frac{2}{\omega_n}\int_{\mathring{S}}\frac{\frac{1}{4}-\rho^2}{|x-\sigma|^n}\,d\mu(\sigma)+c\xi_n\\&=\frac{2}{\omega_n}\int_{\mathring{S}}\frac{\xi_n}{|\xi-\eta|^n}\frac{d\mu(\sigma)}{|\sigma-a|^n}+c\xi_n\end{aligned} \tag{6}$$

ところで，ケルビン変換は $\mathring{S}$ と $H$ の間の位相写像だから，Borel 集合 $X$ が，その閉包 $\bar{X}$ とともに $\mathring{S}$ に含まれれば，その像 $Y$ は $H$ 上の有界 Borel 集合になり，その逆も云える。

そこで，$H$ の有界 Borel 集合 $Y$ に対して

$$\nu(Y)=\int_X\frac{1}{|\sigma-a|^n}\,d\mu(\sigma)$$

と置いて，有界 Borel 集合に対する正の完全加法的集合関数 $\nu$ を定義すれば，(6)より

$$v(\xi) = \frac{2}{\omega_n}\int_H \frac{\xi_n}{|\xi-\eta|^n}\,d\nu(\eta) + c\xi_n \qquad in\ G$$

を得て(＊)の証明が終わる。

特に $\mu$ が $dS(\sigma)$に関して絶対連続，すなわち，ある $\varphi(\sigma)\in L_1(dS(\sigma))$ によって $d\mu(\sigma)=\varphi(\sigma)\,dS(\sigma)$と表しうる場合，$\mu(\{a\})=0$ のために(＊)の項 $c\xi_n$ が消え，(4)より

$$d\nu(\eta) = \frac{\varphi(\sigma)}{|\sigma-a|^n}\,dS(\sigma) = \frac{\varphi(\sigma)}{|\eta-a|^{n-2}}\,d\eta = \psi(\eta)\,d\eta$$

ここで $\psi(\eta) = \dfrac{1}{|\eta-a|^{n-2}}\varphi(\sigma)$,

$$\therefore\quad v(\xi) = \frac{2}{\omega_n}\int_H \frac{\xi_n}{|\xi-\eta|^n}\,\psi(\eta)\,d\eta$$

すなわち，$\varphi$ のケルビン像 $\psi(\eta)$を密度とする Poisson-Lebesgue 積分で $v(\xi)$が表される。

§4　(＊)の表現測度 $\nu$ と定数 $c$ の一意性を見るために，まず(＊)から

$$c \leqq \inf_{\xi\in G}\frac{v(\xi)}{\xi_n}$$

は明らか。更に $\delta>1$ として $\xi_\delta=(0,\ \cdots,\ 0,\ \delta)\in G$とすると，$\rho>0$に対し

$$\frac{v(\xi_\delta)}{\delta} = \frac{2}{\omega_n}\left\{\int_{|\eta|<\rho} + \int_{|\eta|\geqq\rho}\right\}\frac{d\nu(\eta)}{|\xi_\delta-\eta|^n} + c$$

$$\leqq \mathrm{Const.}\left\{\int_{|\eta|<\rho}\frac{1}{\delta^n}\,d\nu(\eta) + \int_{|\eta|\geqq\rho}\frac{d\nu(\eta)}{[1+|\eta|^2]^{n/2}} + c.\right.$$

そこで，まず $\rho$ を十分大きくとって固定し，後で $\delta\to+\infty$として

$$c = \inf_{\xi\in G}\frac{v(\xi)}{\xi_n} \tag{7}$$

を得，$c$ の一意性が示された。

次に，平面 $H$ 内で座標面に平行な面をもつ退化しないコムパクト区間 $I$ を与えたとする。簡単のために $\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_{n-1},\ \xi_n)$ を $(\dot{\xi},\ \xi_n)$ と略記することにし，積分

$$\frac{2}{\omega_n}\int_I \frac{\xi_n}{|\xi-\eta|^n}\,d\dot{\xi} \tag{8}$$

を考えると，これは $I$ の特性関数 $c_I(\mathring{\xi})$による Poissn-Lebesgue 積分の点$(\dot{\eta}_1\xi_n)\in G$ での値に他ならず，(8)を $v_I(\dot{\eta},\ \xi_n)$と置くと $G$ で調和かつ $0<v_I<1$。

もし $\dot{\eta}$ が $I$ の内部 $\mathring{I}$ にあれば変数変換 $\dot{\xi}-\dot{\eta}=\xi_n\dot{\theta}$ を行い，更に $|\dot{\theta}|=t$ として

$$2\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^{d/\xi_n}(1+t^2)^{-n/2}t^{n-2}dt \leqq v_I(\dot{\eta},\ \xi_n) \leqq 2\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^{\delta/\xi_n}(1+t^2)^{-n/2}t^{n-2}dt$$

ここで $d=\mathrm{dis}(\dot{\eta},\ \partial I)$，$\delta=\mathrm{dia}\ I$.

ゆえに $\dot{\eta}$ を固定して $\xi_n\to 0$ とすると $\lim_{\xi_n\to+0} v_I(\dot{\eta},\ \xi_n)=1$，他方，$\dot{\eta}\notin I$ なら $\lim_{\xi_n\to+0} v_I(\dot{\eta},\ \xi_n)=0$ となることは見易い。

そこで，(7)を導いたのと同じく，$v(\xi)$ の積分を2つに分け，前の積分に Fubini の定理を使って

$$\int_I v(\dot{\xi},\ \xi_n)\,d\dot{\xi}=\int_{|\eta|<\rho} v_I(\dot{\eta},\ \xi_n)\,d\nu(\eta)+\int_I d\dot{\xi}\int_{|\eta|\geqq\rho}\frac{\xi_n}{|\xi-\eta|^n}d\nu(\eta).$$

したがって，$\nu(\partial I)=0$ なら，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{\xi_n\to+0}\int_I v(\dot{\xi}_1\xi_n)\,d\dot{\xi}=\nu(\mathring{I})=\nu(I).$$

ところが，$H$ 内の有界開集合 $Q$ は今述べた性質をもつ区間の重なり合わない列 $\{I_k\}_1^\infty$ の和として表しうるから，$\nu(Q)$，したがって有界 Borel 集合 $Y\subset H$ の$\nu$-mass は $v(\xi)$ によって決まってしまう。これが $\nu$ の一意性であった。

§5　以下，記号の繁雑を避けて，$H$ を $R_{n-1}$ と同一視し，$\eta=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_{n-1})$ で $H$ の点を表そう。そのとき，Lebesgue の定理で

$$d\nu(\eta)=\varphi(\eta)\,d\eta+d\theta(\eta)$$

と書ける。ここで $\varphi\geqq 0$ は局所可積，$\theta$は $\nu$ の singular part。

更に，$H$ 上のほとんど全ての点 $\eta_0$ に対し，$S_\delta$ を $\eta_0$ を中心，半径 $\delta$ の閉球とするとき

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{|S_\delta|}\int_{S_\delta}\{|\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)|\,d\eta+d\theta(\eta)\}=0 \tag{9}$$

今，例えば $\eta_0=0$ で(9)が成り立つとすると，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta_0>0$ を見出して，すべての $0<\delta\leqq 2\delta_0$ に対し

$$\int_{S_\delta}\{|\varphi(\eta)-\varphi(0)|\,d\eta+d\theta(\eta)\}<\varepsilon\cdot|S_\delta|$$

と出来る。

かかる $\delta_0$を1つ固定し，十分小さい $\delta$ に対し $2^N\delta\leqq\delta_0<2^{N+1}\delta$ となる自然数を $N$ ($\delta$ に依存する) とすると，$\xi_\delta=(0,\ \cdots,\ 0,\ \delta)\in G$ に対し

$$|v(\xi_\delta)-\varphi(0)|\leqq\frac{2}{\omega_n}\int_H\frac{\delta}{|\xi_\delta-\eta|^n}\{|\varphi(\eta)-\varphi(0)|\,d\eta+d\theta(\eta)\}+c\cdot\delta$$

$$\leqq\left[\int_{|\eta|<\delta}+\sum_{k=0}^{N}\int_{2^k\delta\leqq|\eta|<2^{k+1}\delta}+\int_{|\eta|>\delta_0}\right]\frac{\delta}{|\xi_\delta-\eta|^n}\cdot\frac{2}{\omega_n}\{|\varphi(\eta)-\varphi(0)|\,d\eta+d\theta(\eta)\}+c\delta.$$

ここで，上の行の3つの項を順次，(I)，(II)，(III)と置くと，$n$ だけに関係する定数によって

$$(\mathrm{I})\leqq\mathrm{const.}\varepsilon,\ (\mathrm{II})\leqq\mathrm{const.}\cdot\varepsilon\cdot\sum_0^\infty\frac{2^{k(n-1)}}{(1+2^{2k})^{n/2}}\leqq\mathrm{const.}\varepsilon\cdot\sum_0^\infty 2^{-k},$$

一方，$\delta\to+0$ のとき(III)$\to 0$。

他方，$\eta=0$ を頂点とし $G$ 内に含まれる錐体 $\Delta$：$\xi_n>\mathrm{const.}|\dot{\xi}|$ 内で $\xi\to 0$ のとき，一様に $v(\xi)\to\varphi(0)$ となることが Harnack の不等式を使って示し得る（[1]，(3)）から，かくして関数論で著名な Fatou の定理が証明された。

§6　最後に，今から，ある開集合 $Q\subset H$ の各点 $\eta$ に対して

$$\overline{\lim_{\delta\to+0}}\,v(\eta,\delta)<+\infty$$

が成り立つとしよう。このとき，$\nu$ は $Q$ 内で$(n-1)$次元のルベーグ測度（記号：$|\ \ |$）に関して絶対連続になる。

実際，$A\subset Q$ を$|A|=0$ の有界 Borel 集合とするとき，$\nu(A)=0$ を示せばよいが，そのために対称微分係数（[3]，(1)）の概念を用いる。

$$\overline{D}_{\mathrm{sym}}\nu(\eta)=\overline{\lim_{\delta\to+0}}\,\frac{1}{|S_\delta|}\nu(S_\delta)$$

ここで $S_\delta$は前と同様

によって $H$ 上の点関数 $\overline{D}_{\mathrm{sym}}\nu(\eta)$を定義すると，Borel 可測性を証明でき，今は仮定から $Q$ の各点で $\overline{D}_{\mathrm{sym}}\nu(\eta)<+\infty$。

そこで，各自然数 $k$ に対し Borel 集合

$$A_k=\underset{\eta}{E}[\eta\in A\,;\,\overline{D}_{\mathrm{sym}}\nu(\eta)<k]$$

を考えると，$\{A_k\}_1^\infty$は増大しながら $A$ に近づく。

そこで，有界 Borel 集合に対して定義される正の完全加法的な集合関数

$$\nu_k(Y)=\nu(Y)-k\,|\,Y\,|$$

に Ward の分解定理から導かれる1結果（[3]，(2)）を適用して $\nu_k(A_k)=\nu(A_k)\leqq 0$ を得，これから

$$\nu(A)=\lim_{k\to\infty}\nu(A_k)\leqq 0 \qquad \therefore \nu(A)=0$$

したがって，もし $\nu$ が $Q$ 内で絶対連続でなければ $\overline{\lim\limits_{\delta\to+0}}\,v(\eta,\delta)=+\infty$ となる点 $\eta$ が $Q$ 内に少なくとも1つはある。

われわれのこれまでの議論によって次の命題はほとんど明らかである。

**命題**：$G$ で正値調和な $v(\xi)$が，ある開集合 $Q\subset H$ の各点 $\eta$ で $\overline{\lim\limits_{\delta\to+0}}\,v(\eta,\delta)<\infty$をみたし，更に $Q$ のほとんど全ての点 $\eta$ で $\lim\limits_{\delta\to+0}v(\eta,\delta)=0$ をみたすとする。このとき，$v(\xi)$は $Q$ を越えて下半空間へ調和延長されうる。また，この仮定を $Q=H$ のとき要請すれば，$v(\xi)=c\xi_n$になる。

**REFERENCE**


（1） M. Tsuji, Potential theory in modern function theory. MARUZEN. Tokyo. (1959)
  (1) p.149～p.151　(2) p.34～p.35　(3) p.152～p.153
（2） R. Courant und D. Hilbert. Methoden der Mathematischen Physik. Bd. II. Berlin (1937) p.225
（3） S. Saks. Theory of the Integral. Warszawa (1937)
  (1) p.149　(2) p.151