

# 算数・数学教育における説明し伝え合う活動についての研究

—「事実・手続き」「根拠」「着想」の3つの柱をもとに—

鈴木 明 裕

## A Study on Activity Telling to Explain in Mathematics Education —Based on a Pillar of 3 of the “Fact/Procedure” “Grounds” “Idea”—

Akihiro SUZUKI

### Abstract

By the class of mathematics of many elementary and junior high schools, a class mainly on the problem solving is performed. And, in a class, the scene which children announce and a scene to explain to a friend are prepared. However, it is often formal, and talks are not engaged. The scene of the language is prepared in a class, but there is a problem not to become significant activity for children. Here is the starting point of this study. For the breakthrough of these problems, it is the intention of this study that want to suggest that I think about activity telling to explain it based on a pillar of 3 of the “fact/procedure” “grounds” “idea”.

### Key words

Mathematics education, Mathematical activities, Activities for communicating mathematics

### 1 はじめに

2008年の中央教育審議会答申，学習指導要領の改訂において，言語活動の充実が明示されたことにより，多くの小中学校現場では言語活動の充実にかかわる内容を研究テーマとして実践が行われている。『数学教育における「言語活動」についての研究』（鈴木 2009）において，算数・数学の学習指導について

「言語活動」という新しい内容を指導するというものではないが，「言語活動」という視点から学習指導を振り返り，足りないところを補い，改善していくことが重要であると主張した筆者としては，言語活動が研究テーマとして取り上げられ，実践が行われていることは大変好ましいことであると考えている。

しかしその研究・実践において，現場の声として「言語活動として新しい活動を指導しよう」「言語活動は従前から指導してきていることなので，新たな指導法を開発する必要がない」というような極端なものの中にはあるが，「言語活動の充実として，何を手だてとして加え，どのように授業を改善したらよいか悩んでいる」というものが非常に多くある。

現在の多くの小中学校の算数・数学の授業では，問題解決を中心とした授業が行われ，子どもたちが発表する場面や友達に説明する場面が用意されている。しかしそれは，ややもすると，形

式的なものであったり、話し合いが噛み合っていないものであったりしている。言語活動の場面は用意してあるが、実際には子どもたちにとって意味ある活動と成り得ていないという課題がある。

ここに本研究の出発点がある。そして、算数・数学授業の実践的研究者の立場から、この課題打開に向けて、説明し伝え合う活動を

- ① 事実・手続き      ② 根拠      ③ 着想

の3つの柱をもとに考えることを提案したいというのが本研究の意図である。

そこで本研究では、説明し伝え合う活動の3つの柱をもとに、まず現場実践の事例から筆者の考える課題を明らかにしていく。次に、算数・数学の問題について説明するとは、何を説明することなのかを問い直す。そして、説明し伝え合う活動を充実した活動とするための手だてを探っていく。

ここで、本研究では算数・数学の授業における言語活動について、中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省 2008a）で示されている、特に中学校数学科において重視している数学的活動 [数学的活動]、

- i 既習の数学を基にして数や図形の性質などを見だし発展させる活動
- ii 日常生活や社会で数学を利用する活動
- iii 数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動

の中の、iiiの活動に焦点を絞り、説明し伝え合う活動と表現していくこととする。尚、小学校算数科では中学校数学科のような表現はとっていないが、それは [算数的活動] が各学年の内容を示し、より具体的で各領域に対応して例示しているためである。ゆえに本研究において、説明し伝え合う活動として、算数の授業についても同様に論ずることに問題はないと考える。

## 2 現場実践からの課題

現場実践の事例から筆者の考える課題を明らかにしていくために、筆者が本年度（2010年）参観した2つの事例を取り上げる。

1つは小学校の事例で、1つは中学校の事例である。それぞれの授業者は、30代後半、40代前半の算数・数学を専門とする男性教諭であり、校内では校内研究・研修の主任を務めている。それぞれの学校はともに言語活動にかかわるテーマで、本年度校内研究・研修を進めている。

小学校の事例は、校内研究会での授業で、多くの参観者があり、指導案等の印刷物が準備され、協議会も行われたときのものである。一方中学校の事例は、まったくの通常の授業を参観したもので、他の参観者もなく指導案等の印刷物も準備されていないものである。

### (1) 小学校の事例

単元：小学校4年「小数」      小単元：小数のたし算とひき算（1／4）

本時のねらい：小数でも整数と同じように加法を計算できると見通し、そのためには、リットル図をもとに小数を単位小数（0.1）のいくつ分で整数とみて計算ができることに気づき、計算することができる。

問題：ジュースが0.5ℓ入っているパックと、0.3ℓ入っているパックがあります。合わせると、何ℓになるでしょう。(大日本図書教科書 2008a)

課題：図を使って、たし算の計算の仕方を考えよう！

《クラス全体での説明し伝え合う活動場面の実際》

T：では、話しましょう。

C1：私の考えは、まず0.5に0.3をたすことを考えます。0.の0をとって計算すると5+3で8になります。それに0をもどして0.8になります。どうですか。

C：いいです。

(この後も声の大小はあるが、発言に対して「いいです」と子どもたちは応える。以下略)

T：今とおなじ考え方した人います？ C2君、C1さんとおなじ話をしてくれる。

C2：まず、0.5+0.3の0を省いて、5+3をします。5+3の答は8になるので、さっき省いた0をつけて0.8になります。

C3：0.5+0.3を計算するには、0.を置いて5+3をします。8になったら、0.をつけて0.8になります。

C4：私は、(前に出て、筆算による方法を説明)最初の0.5ℓを0.5かきます、次に0.3ℓの0.3をかき、たし算をしても小数になるので(教師が援助をしながら)0.8になります。

C5：ぼくは、0.1が幾つ分かで考えました。0.5は0.1が5つ分で、0.3は0.1が3つ分、5+3で8で、0.1が8個なので0.8です。

C6：ここの0をとっていいわけは、0.1が幾つ分と考えると、小数が整数になるので0.5は5と0.3は3となります。5+3のわけは0.1が幾つ分かで考えたから0をとっていいんだと思います。けど、この8は0.1が幾つ分かなので、実際には0.8だと思いました。

T：もう一回同じことを話してくれませんか。

C7：昨日の学習と同じように、0.1が幾つ分と考えて。

T：C8さん、C7さん流で同じ説明して。

C8：0.1が何個分かで、0.5は0.1が5つ分で、5+3=8で、この8は0.1が8個分だから0.8です。

T：この0をとっていいわけを説明してくれましたが、この問題で同じようにできますか。ノートにやってみてください。

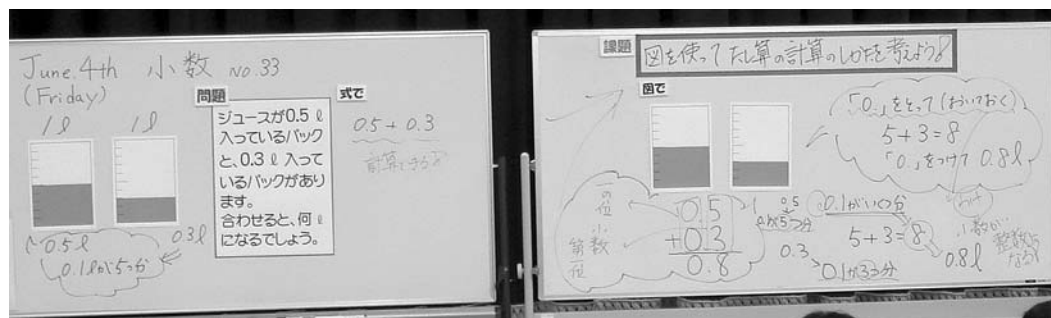


図1 授業での板書内容

## 《筆者の考える課題》

筆者は授業者の授業を何度か参観させていただいているが、いわゆる授業力の極めて高いベテラン教師であると考えている。本時においても、子どもたちの問題への取り組み、ノートへの記述(図2)、話し合いの様子など普段から子どもたちをよりよく鍛えていることを窺い知ることができた。そのような授業者による授業の説明し伝え合う活動の実際の一部が上記のものである。

説明し伝え合う活動を行うにあたって、教師から発言を求められると一斉に手を挙げて自分の意見を聞いてほしいとする姿、一方「図を使って、たし算の計算の仕方を考えよう!」を課題としているのにもかかわらず図と関連付けた発言が全くない姿は、小学生の指導のよさと難しさが表れている。

小学生はよく発言をする、しかしそれは発散的であったり、教師の意図と無関係であったりする。そこを整理していく作業が、説明し伝え合う活動の場面では、教師に求められる。

この事例では、はじめは計算の仕方という事実・手続きについての発言(C1, C2, C3, C4)があり、次になぜ0をとって計算をしてよいかの根拠の議論へ進もうとする。しかしC6は「この0をとっていいわけは」と話を切り出すのが、実際にはそれについて説明していない。C6をうけてC7となっているように授業は進んでいるが、実際は違う。内容のつながりとしては、C5の発言がいったん途切れた後、C7, C8へととなっている。C8も一つの説明の仕方であるが、C1, C2, C3の手続きの根拠を示しているものではない。C4の筆算は次時以降の学習内容であるが、次へつながる議論はできなかった。

重箱の隅を楊枝でほじくるように捉えられるかもしれないが、一見とてもスムーズに授業が進められているようにみえても、実は議論が噛み合っていないこと、整理がなされていないことが、算数を専門とするベテラン教師の研究授業においてもあることを指摘したい。ここに、筆者の考える説明し伝え合う活動の課題がある。そしてこの部分が、現場の声としての「言語活動の充実として、何を手だてとして加え、どのように授業を改善したらよいか悩んでいる」につながっていると考える。

この授業において、「あなたは、計算の仕方について説明してくれたのですね」と事実・手続きについてのことと「あなたは、なぜそうしていいかについて説明してくれたのですね」と根拠についてのことを整理するとどうであったらうか。筆算の説明も「別の計算の仕方を説明してくれたのですね」として、場合により「このことは、みんなちょっと覚えておいてね。次の時間に詳しく調べましょう」とすることもできたであろう。一方で、なぜ0.の0をとるのかの議論が十分できなかったが、それについてある子どもは「まず0.5と0.3の0をとります。なぜかという0をとった方が計算がしやすくなるからです。」

(図3)とノートに記述している。この着想に関することが発表されていたなら、なぜこのような計算方法をしようとするのか、自分たちは何に向けて話し合いをしようとしているのかを明確にすることができたであろう。また「なぜそのようなことを思いついたの」と着想に関する発問から「500+300の計

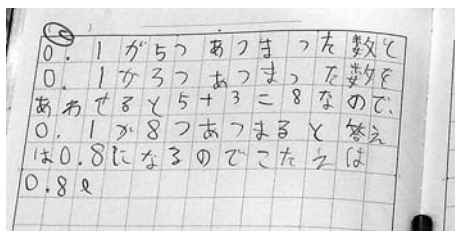


図2 子どもノートへの記述

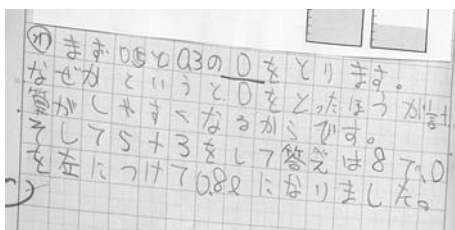


図3 子どもノートへの記述

算を、100が幾つ分と考えて  $5 + 3 = 8$  から800とした仕方と同じようにできないか考えた」という発言を引き出すことができたなら違った説明し伝え合う活動となっていたであろう。

色々示したが、この事例では、教師によって子どもの発言の整理がかなりできており、説明し伝え合う活動として一定のまとまりがある。残念ながら、このような授業をみせてくれる教師は少ない。子どもたちは自分の考えを熱心に発表するが、自分の意見を言うばかりで、相互で高めあうことができていないことがしばしばである。教師が子どもたちの発言の整理をし、つなげていかなければ、説明し伝え合う活動とはならず、単なる言いっぱなし、単なる発表会となってしまう。さらに悲しい場合は、教師による子どもの意見のつまみ食いになってしまっている。

子どもたちの発言を整理し、高めあっていく活動は、「練り上げ」等といった言葉で表現され、算数・数学教育の中では指導されてきていることである。説明し伝え合う活動として新たに出てきたものではない。しかし、そこでの子どもたち発言の整理の仕方は、個々の教師の経験知によるところが多かったのではないだろうか。経験知に頼っていたことを、①事実・手続き、②根拠、③着想という3つの柱を設けることで、準備できる手だて・方法という共有財産へとしていくことができると考える。

## (2) 中学校の事例

単元：中学校2年「連立方程式」 小単元：連立方程式の解き方（3／5）

本時のねらい：どちらの係数も揃っていない連立方程式の解き方を考える

問題：もも2個とすいか3個の代金は2800円、もも3個とすいか2個の代金は2200円。このときスイカ1個の値段はいくらでしょう。

《クラス全体での説明し伝え合う活動場面の実際》



図4 授業での板書内容の一部

T：方程式つくった人？

では発表して下さい。

$$S1: \begin{cases} 2x + 3y = 2800 \cdots ① \\ 3x + 2y = 2200 \cdots ② \end{cases}$$

T：これだけでは、伝わらないから、  
 $x$  は？、 $y$  は？

S2： $x$  はもも1個の値段、 $y$  はすいか1個の値段。

T： $2x + 3y = 2800$ は何？

S3：もも2個とすいか3個の代金が2800円  
ということを表している式。

T：S4君が、次のことをやっていました。ノートにこう書いてありました。

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 2800 \\ +) 3x + 2y = 2200 \quad \text{これどうなりますか？} \end{array}$$

S4： $5x + 5y = 5000$

T：そうだね。それで、S4君は「足せないなあ」と言っていましたね。

T：引いた人もいましたね。

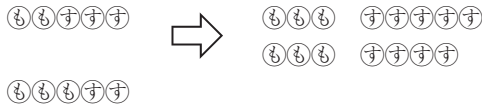
$$2x + 3y = 2800$$

$$\text{—) } 3x + 2y = 2200$$

でS5君は「困ったなあ、どうしようか」と言っていましたね。

どちらの文字も消去できませんね。どうしたらよいでしょうか？

S6：昨日のように絵をかいて、考えました。



S7：だから、①×3で、 $6x + 9y = 8400$ 。

S8：②×2で、 $6x + 4y = 4400$

T：これは何をやっているの？ この式はどういう意味？ 人にわかるように説明を考えてノートに書いてください。

(机間指導後、生徒を指名し、解き方を板書させる)

$$\begin{array}{rcl}
 \text{S9: } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 2800 \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 2y = 2200 \cdots \textcircled{2} \end{array} \right. & \begin{array}{l} \textcircled{1} \times 3 \\ \textcircled{2} \times 2 \\ \textcircled{1}' - \textcircled{2}' \end{array} & \begin{array}{l} 6x + 9y = 8400 \cdots \textcircled{1}' \\ 6x + 4y = 4400 \cdots \textcircled{2}' \\ 6x + 9y = 8400 \\ \text{—) } 6x + 4y = 4400 \\ \hline 5y = 4000 \\ y = 800 \end{array} \\
 & & \text{A. 800円}
 \end{array}$$

### 《筆者の考える課題》

筆者は授業者の授業をはじめて参観させていただいたが、彼もいわゆる授業力が極めて高いベテラン教師であると感じた。本時においても、中学校において顕著となる子どもの個人差へ配慮をしながら、子どもたちをよりよく育て、鍛えていることを窺い知ることができた。そのような授業者による授業の説明し伝え合う活動の実際の一部が上記のものである。

中学生となると数学の学習に対する個人差は顕著なものとなる。また、自我の目覚めとともに「間違えたら恥ずかしい」という思いが強くなり、正解の自信がないと発言しない傾向が強い。小学校の場合は発散的な子どもの発言をどのように整理するか苦心するが、中学校の場合は考えたことを、一部の子どもに限定されることなく、いかに多く子どもに発言させるか苦心するところとなる。

そうした苦心がこの授業の中にも多くあるが、参観をしていて強く感じたことは「1つ1つの事実は分かるが、全体として分からない」ということである。授業のその場面その場面、S1からS9までの発言、板書されている内容に対しては疑問に思うことはない。けど、「今何をしているのか」「どこへ向かっているのか」「なぜそうしているのかは分からない」と感じていると推測できる子どもの姿があった。教師もそれに気づき「どこかわからないところがある？」と問うが、その子どもたちも板書されている1つ1つの内容は分かるから「ありません」としか答えられなかった。

ここに筆者は課題があると考えます。数学を苦手とする子どもにも配慮しながら、説明し伝え合う活動を進めていながらも、子どもも教師もしっかりとこない。

なぜこのようなことが起きているのか。それは、「なぜこんなことをしようとしているのか」という着想についての議論の欠如があるからだと考える。『どちらの文字も消去できない』という困難点は明示されているが、「係数がそろえられると文字が消去できる」「文字が消去できれば連立方程式は解ける」といった議論はされていない。着想の議論がないために、自分達は何をしようとしているのかという全体の姿がつかめない。そのため、なぜS4、S5のつぶやきを教師が取り上げているのか、S4、S5のつぶやきの大切さ、その意味を多くの子どもたちが理解できているとは言い難かった。

黒板には、事実・手続きが残されている。事実・手続きが正しいことは議論され、根拠も分かった、だから事実に対して疑問はない。しかし、その事実が出てくる背景、着想が分かっていると「納得ができた」とは言えない。ある意味、中学生はそこまで成長しているといえる。このような子どもたちへの対応を考えることが、説明し伝え合う活動の充実につながると考える。

小学校・中学校の2つの事例から筆者が考える課題を指摘した。この2つの事例をもってすべてを論じることは過ちであるが、この2つの事例からみえてくる課題は特別なものではなく、筆者が参観した授業や研究協議会で発表される実践事例に多くみられるものである。先にも示したがここで事例として取り上げた2人の授業者は、いわゆる授業力の高いベテランの算数・数学教師である。この2人の教師の事例で指摘した課題の打開方法を示すことは、「言語活動の充実として、何を手だてとして加え、どのように授業を改善したらよいか悩んでいる」という現場の声に応えるものであると考える。

次節では、算数・数学の問題において、何を説明し伝え合うことで「納得できた」といえるのかから考え、算数・数学における説明し伝え合う内容について整理をする。

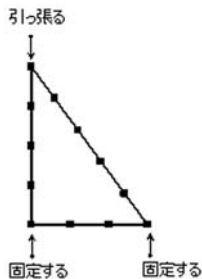
### 3 算数・数学の問題において、何を説明し伝え合うのか

算数・数学の授業の多くは問題解決の形で行われている。もとより、数学は問題を解く学問であると言っても過言ではない。そのため、算数・数学において説明し伝え合う内容の多くは問題の解決にかかわることである。では、算数・数学の問題において、何を説明し伝え合うことで「納得できた」と感じられるか具体例をもとに考える。

#### (1) 説明する立場から

##### 《問題》

古代エジプトの人々は、土地を区分するために、12等分された輪になった縄を使って3：4：5の直角三角形をつくったと伝えられています。  
では、この縄を使って、正方形をつくりなさい。



まず説明する立場から、数学の問題において何を説明し伝え合うのかを考える。

左の問題に対して、何と答えることが、説明し伝え合って「納得できた」といわれることであろうか。

まず、

- ・ 3：4：5をもとに直角三角形をつくる。
- ・ 直角三角形の直角を生かし、4の長さの辺を3の長さにとり、固定する。
- ・ 正方形の3点が決まったので、残りの縄の真ん中(3：3)の点をもって引っ張る。
- ・ その点を、正方形の4つ目の頂点として決める。

というものが考えられる。これは、正方形のつくり方つまり手続きを示したものである。この通りにすれば正方形をつくることはできるが、なぜ正方形ができたかについては説明していない。

次に、

- ・ 直角三角形の直角をもとに1辺3の直角二等辺三角形をつくる。
- ・ これにより、直角三角形の三辺が決まる。
- ・ 斜辺を同じにして、斜辺でない2辺を3とする三角形をつくるのだから、この三角形は先の直角二等辺三角形と合同である。
- ・ だから、4辺が等しく直角を含む四角形であるから正方形。

というものが考えられる。これは、正方形の作り方・手続きがなぜ正しいかという根拠を示したものである。

さらに、

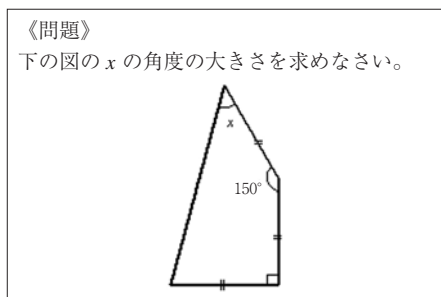
- ・ 正方形であるので、各辺を3として引っ張るが、それだけではひし形になってしまう。
- ・ 四角形の角として、直角をつくることが大切だ。

というものが考えられる。これは、正方形の作り方・手続きをどのようにして導き出したか、どのような見直しをもって考えたか、という着想を示したものである。

「正方形をつくりなさい」と問われたのだから、つくり方の手続きを示したことは一般的には説明者としての責任を果たしたといえるだろう。しかし算数・数学で、つくり方の手続きだけを示して説明者としての責任を果たしたとされるだろうか。多くの場合、直感によって得られた結果をよしとせず、根拠の説明まで暗黙のうちに求められていることが多い。つまり、算数・数学においては、説明すべき内容として、事実・手続きと根拠が求められるといえる。しかし、ここで示した例のような着想の説明は、問われれば答えるがという程度のもので、必ずしも説明として求められるものとはなっていない。

## (2) 説明を受ける立場から

次に説明を受ける立場から、算数の問題において何を説明し伝え合うことで「納得できた」と感じられるかを考える。



左の問題は算数オリンピックにおいて出題されたものである（東大算数研究会 1996）。

さてこの問題が解けなかった、結論が得られなかったとき、「答えは、 $45^\circ$ です」という事実だけを伝えられて「納得できた」と言うだろうか。勿論言わない。当然「どこから45という数字は出てきたのですか」という質問が出てくる。それに対して、「 $180 - 150 = 30$ ,  $30 \div 2 = 15$ ,  $60 - 15 = 45$ 」と計算の手続きを説明され

たととしても、「それぞれの数値の意味は」「なぜその方法で求められるのか」と根拠を問う質問が出てくる。そして、例えば図5のような補助線をひいたこと、それによって導かれたことを明らかにされることで、手続きでの数値の意味が分かってくる。

さてここで、問題の答えという事実、それに至る手続き、根拠が分かったら、それで「納得した」と言うだろうか。次の質問として「どうしたら、その補助線が思いつくの？」と着想を聞きたくないのであるだろうか。「自分たちの知っている基本的な図形、正方形、正三角形を図の



中にかいた」という着想を知れば、「自分も次はそのように考えてみよう」と感じ、活動の仕方あるいは数学的な見方・考え方を学ぶことができたといえる。

問題集の解答には、解答（事実）のみが書かれているもの、解説として手続きや根拠まで書かれたものがあるが、着想まで示されているものは少ない。そのため、解答を見て「なるほどなあ、でもその補助線、次のときに気付く自信がないなあ」等と感じてしまうこともある。算数・数学を苦手と思っている子どもたちほど、そんな思いをしているのではないだろうか。



図5 補助線の例

以上のように、算数・数学の問題においては、事実・手続き、根拠、着想について説明し伝え合うことで納得し合うことができるのではないだろう。そして、つい見逃されがちとなる着想の説明が実は「よくわかった」「納得できた」には大きな意味をもつといえる。

この問題をさらに追究していくと算数・数学における理解へと発展するだろうが、ここでは、事実・手続き、根拠、着想の内容を含めて説明を受けると「よくわかった」「納得できた」と感じることに、説明する方は着想について積極的に示すことが少ないことの確認とする。

#### 4 説明し伝え合う活動を充実するために

「2 現場実践からの課題」「3 算数・数学の問題において、何を説明し伝え合うのか」においての指摘をもとに、①事実・手続き、②根拠、③着想 という3つの柱を設けて対応することを手だてとして、説明し伝え合う活動を充実させる学習指導を考えていく。

##### (1) 多様な方法で解決すること、説明し伝え合う活動の価値

20世紀初頭数学教育改良運動の際のシカゴ大学教授 E.H.Moore の言葉

すべての重要な結果は、すくなくとも2通りの異なる方法で得るべきである。とりわけ重要な結果はいつも本質的に異なる方法によって得るべきである。このような指導によって生徒たちはすべての権威から解放されるであろう。

は、算数・数学教育においてよく知られている。説明し伝え合う活動の充実を考えるにあたり、この精神に立ち返ることが肝要であると考えられる。

算数・数学の授業の多くは問題解決の形で行われ、子どもたちは多様な方法で解決をし、自分達の解決を説明し伝え合うことで、解決を高めていき、学習・指導目標を達成していく。授業の中で、なぜ多様な方法で解決するのか、そして説明し伝え合うのか。それを見失うと、形式だけの問題解決の授業となってしまう。それは、ときとして教え込みの授業より害が大きい。

筆者は一時期内輪の研究会において、「なぜ多様な解決方法を発表させるのですか、先生にとって都合のよい意見を収集するためですか、捨てられる意見を発表した子はかわいそうではありませんか」と意地悪な質問をよくした。それは、子どもたちに、多様な方法で解決させたり、説明し伝え合わせたりすることが、教師の説明の代用や補助としか思えないものが多くあったからである。子どもたちが、多様な方法で解決すること、説明し伝えあうこと、その活動自体に価値が

なければならない。

多様な方法で解決をすることは、自分自身で確かめを行い、成果に対して自信をもたせることができる。だから、そのように指導されなければならない。

また、多様な方法の解決は、その後の発展において大きな意味をもつことがある。

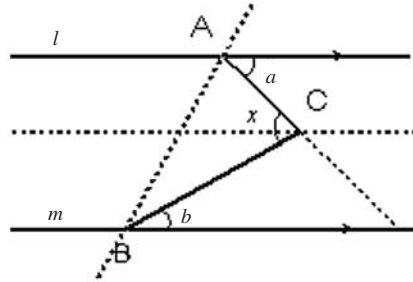
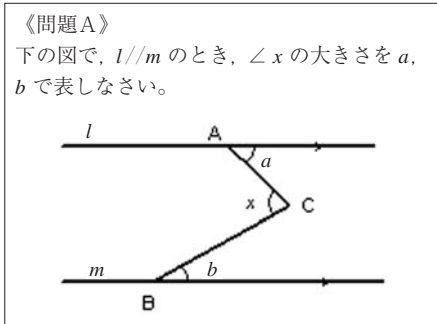
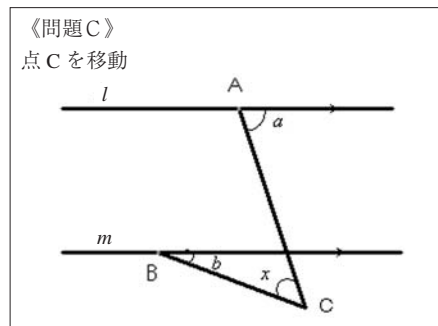
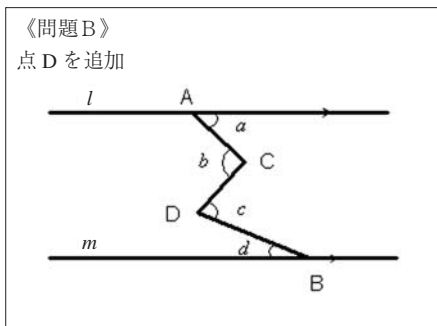


図6 解決のための補助線

上の問題Aは中学校の教科書や問題集には必ずといってよいほど取り上げられている問題である。この問題の解決方法として、①点Cを通り $l$ に平行な直線を引く、②ACを延長する補助線がよく取り上げられるが、③ABを通る直線を引く補助線も解決方法である。①②の解決方法には、「学習した平行線の性質がうまく使えないか」「三角形の内角・外角の性質が使えないか」という既習内容に直結させようという着想がある。③は「結ばれていない2点A、Bをとりあえず結んでみたい」という着想はあるが、そこには①②と比べ明確な見通しや意図はない。そのためか、効率を重視するためか、教科書や問題集において①②の解決方法は取り上げられるが、③が取り上げられることはない。しかし、③の補助線はまずは引いてみたい補助線であり、どちらかというとな数学を苦手とする子どもがよく引く補助線である。だが残念ながら多くの場合、③の解決を試みた子どもが自力で解決まで至ることは少ない。

問題Aを発展させて、次の問題B、問題Cを考える。



問題Bでは、①の解決方法がとても有効に働く。点Dだけでなく、さらに点を増やしていった場合にも、左向きの角の和  $(a+c)$  と右向きの角の和  $(b+d)$  が等しくなるという興味深い図形の性質を見出すことができる。問題Cは点Cの移動である。問題Cの場合だけでなく、いろいろな場所に点Cを移動させたとき、 $a$ 、 $b$  と  $x$  の関係が変化する境界線が出てくる。この境界線は、③の解決方法で用いたABを通る直線である。つまり、問題Cにおいては、③の解決方法の方が①②より有効となる。

問題によっては、その問題の結論を得るのに有効な解決方法と発展を考えたとき有効に働く解

決方法が異なる場合がある。子どもたちに多様な解決方法で取り組ませることは、子どもたちに多くの可能性を蓄えさせることとなる。

このように、E.H.Mooreの精神を大切に、多様な方法で解決をさせることは、とても意義深いものである。そして、それをもとにして説明し伝え合う活動を行うことにより、中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省 2008b）で示されている

- ・自分自身の言葉で着想や思考を表すことにより、自分の考えを再確認することができる。
- ・言語で表されたものは、自分の考えを見つめ直す反省的思考を生み出し、さらに研ぎ澄まされたものとなっていく。
- ・説明し伝え合う活動における他者とのかわりかは、一人では気付かなかった新しい視点をもたらし、理由などを問われることは根拠を明らかにし、それに基づいて筋道立てて説明する必要性を生み出す。
- ・数学的な知識及び技能、数学的な表現などのよさを実感する機会が生まれる。

という価値を得ることができる。これらは教師が授業を進めるための代用でも補助でもない。

このような説明し伝え合う活動の価値をよりよく実現するためにどのような手だてが考えられるか、事実・手続き、根拠、着想の3つの柱をもとにした学習指導について以下考えていく。

## (2) 3つの柱から整理することの価値

「2 現場実践からの課題 (1) 小学校の事例」で指摘したように、子どもたちの考えや意見には事実・手続きと根拠が混在している。まず、それを整理することが肝要である。

それは、仕切りのない本箱に意図なく乱雑に置いてあった本、あっちを向いていたり、倒れていたりしていた本を、本箱に仕切りをつくることで整理していく作業と似ている。説明し伝え合う活動という本箱に、子どもの考えという本を整理するために、①事実・手続き、②根拠、③着想という仕切りを準備したい。子どもの様子で異なるが、「〇〇さんは、こうなるという事実を言ってくれたのですね」「〇〇さんは、なぜそうなるか理由を説明してくれたのですね」と教師が確認するだけで大きく違う。学習がよりよく進めば、仕切りの中の本の順序、隣の本との関係も整理されていくだろう。ここに、3つの柱から整理することの価値があると考えられる。

ここで子どもたちの発言に着目してみると、事実・手続きや根拠に関することは多いが、着想についての発言はなかなかない。この理由として、まず自分の考えを見つめ直して、着想を記述したり、話したりすることは、容易ではないことがある。事実・手続きや根拠について説明し伝え合うことができる子でも、「なぜそのようなことを思いついたの」「困っている友達が次回気付けられるように、どのように考えたらいいか教えて」と質問されてすらすらと答えられるものではない。ましてや、予習するのはよいが、自分で考えず結果のみを知っている子どもには答えられない。

だから逆に、進んでいる子には着想を説明することを課したい。すると、事実・手続きや根拠を知っている子どもにも、同じ問題に対して考える課題を与えることができる。つまりクラス全員が、遅れがちな子も進んでいる子も、同じ問題に取り組み続けることになる。実際の授業ではこの価値は大きい。「授業を壊すのは進んでいる子である」という言葉があるが、そのような子どもに価値ある活動を提供することができる。そしてその子どもの活動を、クラス全体にもどして、クラス全員の共有のものとしていきたい。遅れがちな子には、まず事実・手続きそして根拠が説明できるように、進んでいる子には着想まで説明を考えさせることにより、学習を広げたり、深

めたりさせたい。

着想の発表の難しさとして、演繹、帰納、類推の違いを考えたい。事実・手続きや根拠は演繹的である。だから、子どもたちは、自分自身の中である程度正しさを確認して、記述し発表しているといえる。一方、着想は帰納的であったり、類推的であったりする。だから、その推論は正しいことも間違っていることもある。そしてそのことを子どもたちも知っている。小学校の低学年では思いついたことをすぐ口に出すという場面を目にすることができるが、その子どもたちが、学年が上がるにつれて、なかなか発言しなくなる。それはじっくり考えることができるようになったというよさもあるが、逆に演繹的に正しいと判断できたものしか発言してはいけないといつしか思うようになっていくからではないだろうか。「2 現場実践からの課題 (2) 中学校の事例」には、そうした面が強く出ている。教師は、よい着想のもと試行したがうまくいかなかった解決方法を紹介しようとするが、子どもは事実のみを発言しその着想を語ってくれない。だから、他の子どもへ、学級全体へと広がらず、教師の意図が伝わらない状態となってしまった。ここで「まず、前回の授業と同じように2つの方程式をたしたり、ひいたりすることで文字を消去しようとした」という着想の発言を引き出すことができたら、「工夫して、文字を消去できるようにしよう」という目的地を明確にすることができ、子どもたちも教師もしっくりできたと考える。つまり、着想を説明し伝え合う活動を行わせることにはそれなりの困難があるが、その活動がなされたならば学習の理解が容易となり、深まり、広がることとなる。着想は学習の理解において重要な役割を担っている。

このような着想を説明し伝え合うことの価値については、言語活動が重視された今回の学習指導要領改定以前から示されている。「個に応じた指導に関する指導資料」(文部科学省 2002)においては、

「どうしてそんなにうまいことに気付いたの?」という着想発生の状況報告(発表)は、

- i) 同じような場面で概念や公式などを適用する視点を知り、
- ii) 今後その考え方を活用する際に必要となる状況を確認する機会となり、
- iii) その考え方がいかに有効かを知ることへもつながっていく。

と、本研究で具体例をもとに述べてきたことを端的に示している。このような着想を説明し伝え合う活動の価値を認識して、指導に臨みたい。

このように重要な着想を説明し伝え合う活動ではあるが、既に示してきたように、事実・手続きや根拠に比べ、振り返って考えたり、発言されたりすることが少ない。むしろ学習指導にあたっては、教師の意図的な指導がなければ、着想を説明し伝え合う活動はなされないと考えたほうがよい。だから、そのように指導されるべきである。

そのためには、それだけの環境を整える必要がある。正しいと確認できていない帰納的、類比的推論を発表することができる学習環境、間違った発言でも認め合って、ともに考えることができるような授業の雰囲気かなければならない。

例えば平行線の問題において、③の解決方法を行った数学を苦手とする子が「結ばれていない2点A、Bを結んで、三角形をつくって考えたんだけど、うまくいかない」という発言ができる環境であったなら、さらに「いろいろな補助線を考え、うまくいかないかと、描いては消した。やっと、この補助線が見つかった」「私も最初ABを結んでみたけど、その補助線ではうまくいかないと思って、平行線の補助線を考えた」などという着想の話し合いができる環境であったなら、もっと学習を深め、広げることができるであろう。

算数・数学が嫌いな子ほど試行錯誤をしない。算数・数学が嫌い・苦手という子は、「算数・数学が得意な子は、失敗をせずに正しい結論を導いている」と考え、「自分だけ失敗をしている」と思いがちである。着想を話し合うことで「なあんだ、みんなも失敗しながらみつけているんだ」と言うようになれば、「算数・数学が好き」「算数・数学が得意」と言ってくれる子に変わるのではないだろうか。

事実・手続き、根拠、着想の3つの柱から整理することの価値を示したが、着想にかかわるものが多くなった。それは、

- ・ 3つの柱から整理することで、説明し伝え合う対象が明確となり、解決を高めることがよりよくできる。
- ・ 事実・手続きについて説明し伝え合う活動はある程度できているが、着想を説明し伝え合う活動は十分にできていない。
- ・ 着想を説明し伝え合う活動を充実することができれば、子どもたちの理解は容易となり、深まり、広げられる。
- ・ 着想を説明し伝え合う活動を行わせるためには、教師の意図的な指導が必要である。

と考えたからである。

このような事実・手続き、根拠、着想の3つの柱をもとにした学習指導を行うために、必要不可欠なのが授業の準備としての教材研究である。次に教材研究の例を示す。

### (3) 3つの柱をもとにした教材研究例

教材研究が重要であることは、教師たるものすべてのものが知っている。しかし、実際には「教材研究の重要性は分かっているけど、具体的に何をしたいのか分からない」という若い先生たちがいる。

筆者は今までは「まず教科書の問題を、子どもに期待するのと同じように、多様な方法で解決しましょう」と提唱してきた。説明し伝え合う活動の充実を考えるにあたり、「多様な方法の解決を、①事実・手続き、②根拠、③着想の3つの柱をもとに整理をしましょう」を加える。ここでの基本も、子どもに期待することは教師自身が行うということである。

以下は筆者が実験授業を試みたときの教材研究の実際である。

単元は6年『単位量あたりの大きさ』の第3時である。前時まで、こみぐあい、人口密度について学習している。

まずは、学習指導内容の確認である。本時で取り上げるべき教科書の問題は（大日本図書教科書 2008b）、

③ ひできさんのお父さんの自動車は、40ℓのガソリンで520km走り、お兄さんの自動車は35ℓで385km走りました。

ガソリンの使用量のわりに、走る道のりが長いのは、どちらの自動車でしょう。

④ さつまいもがえみ子さんの家の130㎡の畑からは923kg、ひろしさんの家の90㎡の畑からは621kgとれました。

さつまいもは、どちらの畑がよくとれたでしょう。

であり、次のまとめがされる。

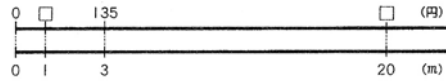
人口密度、1ℓあたりの走る道のり、1㎡あたりのとれ高などを単位量あたりの大きさといえます。

つまり、本時では前時までの学習も踏まえて「単位量あたりの大きさ」についてまとめることが重要なねらいである。用語「単位量あたりの大きさ」は教えるべき内容である。

次に次時の学習内容の確認である。次時の主となる問題は、

- ⑤ 長さが3mで135円のりぼんがあります。

このりぼん20mの代金はいくらでしょう。



である。これは次単元の分数の乗除へとつなげるこ

とを意図したものである。このことを踏まえて、単位量あたりの大きさを求めることが割り算であるというまとめも可能であるがそこまでは踏み込まないままとする。しかし、次時へのつながりとして本時において数直線で考える着想を与えておきたい。

ここまでのことを前提として、③の問題を3つの柱から分析する。

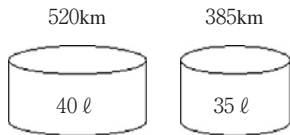
① 事実・手続き

- ・ 父  $520 \div 40 = 13$  兄  $385 \div 35 = 11$   $13 > 11$  よって父の車
- ・ 40と35の最小公倍数は280だから、ガソリン280ℓで走れる距離を求めて、  
 父  $520 \times (280 \div 40) = 3640$  兄  $385 \times (280 \div 35) = 3080$   
 $3640 > 3080$  だから父の車

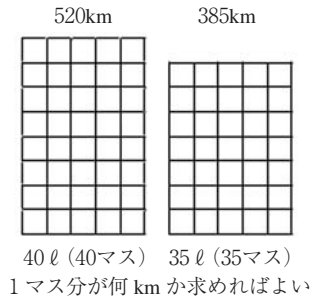
② 根拠

- ・ そのままでは比較できないので、ガソリンが同じ量になるようにして比べた。
- ・ ガソリンの量と距離の関係を図に表して

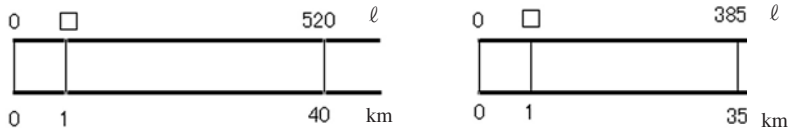
(その1)



(その2) ガソリンの量をマス目で表して



- ・ 数直線を使って表して



③ 着想

- ・ ガソリンが同じ量だったらどちらが多く走るか考えた。そして、その同じ量を1ℓだっただと考えた。同じ量にそろえるのに、1ℓだと計算がしやすい。
- ・ 前々回学習したプールのかみぐあいでの面積と人数、前回学習した人口密度と同じように一方をそろえることで比較できると考えた。そのとき、1でそろえると比較しやすいので同様にした(類比的推論)。
- ・ 数量関係を図に表すと、分かりやすくなる。考えやすくなる。

④についても同様に考えることができる。

ここで、③、④の問題の違いをどのように捉えるかを考える。場面の変化はあるが、単位量あたりの比較においては、同じである。数値については、整数値であったものが小数値となる。しかし単位量あたりの小数値については④が初出ではない。単位量あたりの大きさを考える場面の拡張の一つと捉える程度でよいと考える。

そこで、③において説明し伝え合う活動を充実させる。そのとき、多様な方法で解決させること、次時以降の学習を踏まえ、説明し伝え合う活動では図による説明や数直線による説明を取り上げておきたい。④ならびに練習問題では、計算結果を求めさせるのではなく、③において明らかにした何を行っているのか、数値の意味等を問う形で行いたい。

このように実際に教材研究を行ったことで、

- ・ 3つの柱という明確な視点ができたので、多様な方法での解決が整理しやすくなる
- ・ 1つの解決方法についても事実・手続き、根拠、着想から整理ができ、相互の関係を明らかにしやすくなる
- ・ 事実・手続き、根拠、着想の相互の関係から、次時以降の問題解決において必要な着想を得るために、本時でどういう指導をしておかなければならないか考えやすくなる

ことを実感した。ここでの教材研究は特別なことではなく、若い先生や教育実習の学生にも可能なことであると考え。このことは、個々の教師の経験知に頼っていたことを、準備できる手だて・方法という共有財産へとしていくという本研究の意図に合うものである。

このような教材研究をもとに授業に臨めば、子どもたちの言葉に耳を傾け、より適切な指示が与えられるであろう。それは、経験知に頼ったベテラン教師の技でなく、すべての教師が等しく使える手だてである。

## 5 おわりに

「言語活動の充実として、何を手だてとして加え、どのように授業を改善したらよいか悩んでいる」という現場の声に、算数・数学授業の実践的研究者の立場から、課題打開に向けて、説明し伝え合う活動を、事実・手続き、根拠、着想という3つの柱をもとに考えることを提案し、そのなかでも特に着想に配慮した指導の重要性を示した。

現在、この考えに従った実験授業による調査、学生や若い先生方がこの考えに従って教材研究がよりよく行われるか、さらにそれを授業に生かすことができるかの調査を行っている。その途中段階ではあるが、

- ・ 多様な考え方をさせるために、着想を教師が示して導くことも必要であること
- ・ 着想は、「こうなるかな」と曖昧な見通し場面においても有効であり、活用すべきであること

が出てきている。本研究では、出発点として言語活動があり、説明し伝え合う活動に焦点を当てたため、問題解決を中心とした授業という練り上げの場面を重視した。そのため、着想についても反省的思考として捉えることが多くなった。反省的以外の場面における事実・手続き、根拠、着想という3つの柱の活用については今後の課題である。

「子どもに期待することは教師自身が行う」を基本姿勢として教材研究に取り組み、子どもたちの指導にあたってきた。子どもたちに自分の着想を説明し伝え合う活動を期待したい。だからこの研究において、まず筆者自身の着想を説明し伝えたいと考えた。

## 引用文献

- 鈴木明裕（2009） 数学教育における「言語活動」についての研究 岐阜聖徳学園大学研究紀要 p74
- 大日本図書教科書（2008a） 新版楽しい算数4上 大日本図書 p58
- 大日本図書教科書（2008b） 新版楽しい算数6上 大日本図書 p74
- 東大算数研究会（1996） 親子でめざせ！算数オリンピック 講談社 p11
- 文部科学省（2008a） 中学校学習指導要領解説 数学編 教育出版 p15
- 文部科学省（2008b） 中学校学習指導要領解説 数学編 教育出版 p29
- 文部科学省（2002） 個に応じた指導に関する指導資料—発展的な学習や補充的な学習の推進—（中学校数学編）  
教育出版 p27