

新しいファジーシステムによる時系列分析モデルの推定方法 New Estimate Method of Time-series Analysis in Fuzzy system

勝 木 太 一

概 要

本研究は、著者のファジーシステムによる時系列分析の手法の開発作業の一環に位置づけられるものであるが、筆者が以前に公表した手法と大きく異なった新しい手法を提唱するものである。ここでは、時系列分析モデルの同定の問題をクリアするために、一般的な（確率過程による）時系列分析モデルを援用した形でファジーエリアの特定を行うことによって、新しい方法のファジー区間解析を実現しようと言うものである。したがって、モデル推定にファジー回帰分析などこれまで開発・実用されてきた手法を全く使用しないものとなっている。

ここで、述べる手法はモデルの同定自体は一般的な時系列分析によっておこない、ファジー区間推定はファジー測度論に則った方法で行うというものである。これによって、データのトレンドなどの排除をはじめとした定常性の確保が極めて容易なものとなり、また、VARモデルやその他の時系列分析モデルへの適用、さらには時系列分析のみならず一般的な回帰分析への適用も可能なものとなっている。

1：はじめに

本論は、ファジーモデルを適用して適切な「経済時系列分析」を行えるようなモデルを構築するというを目的とするものである。周知のように、時系列分析において最も大きな問題の1つが、時系列データの非定常性であることはいままでもない。これに対し、これまでの時系列分析モデルでは、データの非定常性を処理するために様々な手法を工夫してきた。

特に、複数の変動要因（例えばタイムトレンド等）を有すデータを扱う場合、単に時系列分析モデルを適用して推定を行うことは、本来のデータの特性を歪曲したモデル推定となることが多い。そのため、何らかの形でデータに内含されている各種の変動を処理して、時系列分析モデルを構築することになる。このような手法の例として、通常確率モデルにおいてはARMAモデルやARIMAモデル、およびカルマンフィルターの適用などをあげることができるであろう。

しかし、ファジーモデルにおいては確率モデルにおけるような「各種の変動」を処理する手法は未だ完成されていないといえることができる。

このため、ファジー線型モデルを時系列分析に用いるという研究は非常に少なく、ファ

ジモデルによる時系列分析はあまり進んでいないという現状にあるのである¹⁾。

データに含まれる複数の変動要因は主に、

- ①傾向変動 ②循環変動 ③不規則変動

の3つをあげることが一般的であるが、これら各種の変動の分離などの処理について考えてみることにしよう。

まず、①の傾向変動について、事前情報として滑らかに変化することがいえる場合、これを変数の変動から抽出することが定常性の確保に非常に大きな利便性を与えるものであることは言うまでもない。これによって残る変数の変動が定常的となる可能性が大きくなり、その変数にファジー線形モデルによる「時系列分析」を適用することが可能になるはずであるからである。

しかし、このような傾向変動を抽出によって、経済変数の変動がより緻密に分析することができるようになり、ファジーモデルのテーマである変化の「ゆらぎ」の範囲を適切に把握することができるようになるにもかかわらず、その手法はファジー数学では確立されていない。

また、時系列分析モデルについては、ファジー回帰分析を援用することによって疑似的にはあるが可能であり、また、その事例も見られるが、その手法について多くの問題点もあり、また、そのモデルの同定方法については未開拓である。

このような点から、ここに、これまでの時系列分析モデルの同定方法を活用することが可能な、ファジー数学を援用した全く新しい時系列分析のためのモデル推定方法を提唱することにしたい。

2：これまでのファジー回帰分析の概説

一般的な確率モデルによる回帰分析では、説明変数のベクトルを

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \quad - (1)$$

とすると、

$$y_i = \sum a_j x_{ij} + u_i \quad - (2)$$

$$(j=1, \dots, n)$$

1) ファジータイムトレンドの推定方法は、勝木(8)に、また、本論とは別の時系列分析モデルのためのファジー回帰分析の手法については、勝木(9)(10)に勝木が開発提唱した手法を説明しておいた。

として、 a_j を推定し、 x_{ij} で説明できる y_i の推定値と現実値（実績値）の誤差 u_i が確率過程に基づいているという仮定を行うのであり、誤差 u_i を最小とする（最小二乗法では $\sum u_i^2$ を最小とする） a を決定することが問題であった。

このような確率モデルでは、一定の x_{ij} への反応からはずれた「誤差」は確率的なものであり、多くの場合モデルの外からのノイズをも含むものであると解されている。

しかし、ファジーモデリングでは、人間の行動などを説明する場合、これをノイズと解するよりは、むしろ、システム自体のゆらぎと解し、それを説明できるモデルとするのである。

したがって、「ファジー回帰（可能性線形）モデル」は、上に述べたようなこれまでの「回帰分析」の問題点をクリアするという目的で、現象のゆらぎを「確率過程」の問題として把握するのではなく、「ファジー領域」の問題として捉えようというものである。

たとえば、観測期間中に、説明変数のパラメータに変動がみられることをモデル化しようとする場合、

$$Y_j = \sum A_i X_{ij} \quad - (3)$$

として、

$$A_j = a_i \pm c_j \quad - (4)$$

とするわけである。ここで A_j をファジー係数として考えると、ファジー回帰モデルの適用が可能となる。周知のように、ファジーモデルは第1図のように解釈できる。

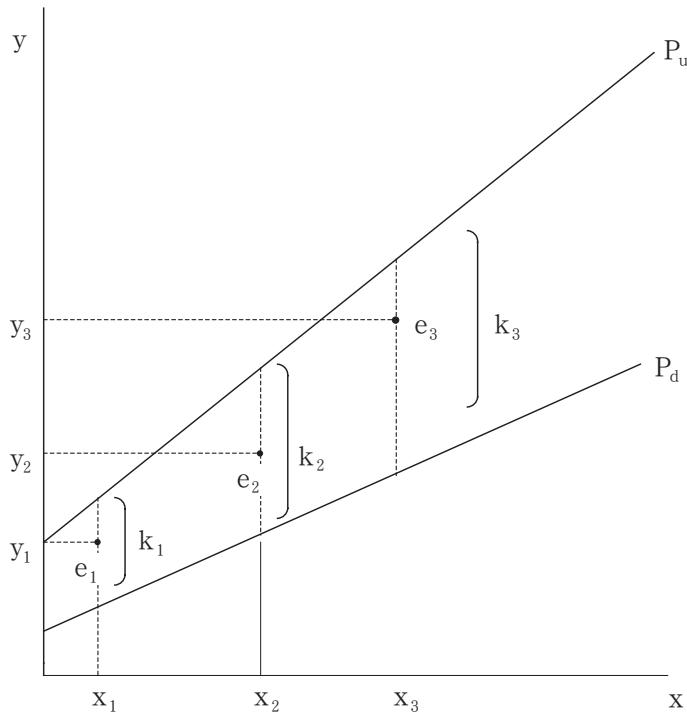
現実値 (e_i) に対応して与えられた x_i に対して、 y_i の値のとりうる範囲は、すなわち可能性の範囲は、「第1図」のように P_u （上限）と P_d （下限）に囲まれた k_i であるとする。

このときの k_i の幅を最小に決定することが「ファジー回帰」の最重要な問題である。

このことによって無限大の可能性の範囲を現実的に可能な範囲へと絞り込むわけで、この範囲内にある全ての値が y_i の妥当する値ということができるのである。これを図示すると、「第1図」のような座標軸上に現実値データをプロットし、そのデータをすべて内包できる線分 P_u と P_d を最小の幅で求めるということである²⁾。

2) この「ファジー回帰分析」の手法については参考文献(1)(3)(18)などの詳しい。

第1図



この幅を有す領域がファジー領域と呼ばれるものであるが、これを

$$Y_j = A_j X_j \quad - (5)$$

で示し、 $A_j = (a_j, c_j)$ - (6)

と表記することにしよう。この c_j は Y_j のとりえる範囲を示すものであるから、第1図の P_u と P_d に囲まれた範囲にある Y の値は以下のように示すことができる。

すなわち、問題は、

$$y_j \leq a_j x_j + c_j |x_j| \quad - (7)$$

$$y_j \geq a_j x_j - c_j |x_j| \quad - (8)$$

という制約条件のもとに

$$\min \sum c_j |x_j| \quad - (9)$$

$$c \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad - (10)$$

となる c_j を決定するという線形計画の問題に帰着させることができるのである。

3：ファジー時系列分析の問題点

時系列分析において重要なことは、変数の定常性を確保するということである。このためには、ノイズやトレンド等の影響を変数から除去しなければならない。特に経済の時系列データを分析する際には、経済の時系列データの特徴をよく理解しておかなければならない。一般的に、経済データの変動は以下のような要素から成立しているモデルが考えられている。

$$x = t(\text{Trend}) + v(\text{Cycle}) + e(\text{Irregular})$$

このようなモデルについて時系列分析を行う場合、周知のようにこれらの変動要因を分解した形での「状態空間モデル」を適用して推定が行われる場合が多い。

すなわち、Trend が滑らかに変化する確率過程に従うものと仮定し、また Cycle が k 次の AR 過程に従うものと仮定する。

そのとき Trend (t_n) は以下のような k 次の確率定差方程式

$$\Delta^k t_n = \varepsilon 1_n \quad - (11)$$

で表すことができる³⁾。

また、Cycle (v_n) は

$$v_n = \sum \alpha_i v_{n-i} + \varepsilon k_n \quad - (12)$$

で定式化されるとする。

このとき、Kitagawa and Gersch の状態空間モデルによって、これは以下のように表現されることになる。

ε 、 η は期待値 0 で正規分布に従う確率変数ベクトル z_n を状態空間ベクトルであると規定すると、

$$z_n = Fz_{n-1} + G\varepsilon_n \quad - (13)$$

$$x_n = H_n z_n + \eta_n \quad - (14)$$

となる。

3) 赤池弘次、北川源四郎(2)pp. 115-131

ここで各変動要因について示すと、カルマンフィルタのアルゴリズムを適用して

$$z_a = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ \vdots \\ Fm \end{bmatrix} z_{n-1} + \begin{bmatrix} G1 \\ G2 \\ \vdots \\ Gm \end{bmatrix} \varepsilon_n \quad (15)$$

$$z_n = \begin{bmatrix} z1_n \\ z2_n \\ \vdots \\ zm_n \end{bmatrix} \quad (16) \quad \varepsilon_n = \begin{bmatrix} \varepsilon1_n \\ \varepsilon2_n \\ \vdots \\ \varepsilonm_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$x_a = [H1, H2, \dots, Hm] z_n + \eta_n \quad (18)$$

と記すことができることになる。

なお、ここで変動要因が m 個あり、

F_j, G_j, H_j ($j=1, 2, \dots, m$) として、その中

$F1, G1, H1$ は trend

$F2, G2, H2$ は Cycle

η はノイズ

を示すことにする。したがって、トレンド要因 (trend) については

$$F1 = \begin{bmatrix} C1, & C2, & \dots, & Ck \\ 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & 1 \end{bmatrix} \quad (19) \quad G1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$H1 = [1, 0, \dots, 0] \quad (21) \quad z1_n = \begin{bmatrix} t_n \\ t_{n-1} \\ \vdots \\ t_{n-k+1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

と表すことができる⁴⁾。

4) 廣松 毅、浪花貞夫(19) pp.145-153.

以上に示したようなモデル構造によって経済時系列データのトレンドを抽出することができ、またこれによってデータ変数の変動要因を分解することが行われる。

このようなカルマンフィルタによるモデリングは、多重な変動要因を内含する経済データの時系列分析にはきわめて好都合なものである。しかし、ファジーモデリングにおいてもこのような「変動要因」の分解が可能であるためには、タイムトレンド（傾向変動）のファジー数学的処理が可能でなければならないが、一部の試みを除いては、その手法の開発や理論的考察が行われてはいないのが現状である⁵⁾。

この理由については、ファジーデータのファジーエリアの区間（巾）から、やはり区間の認められる「変動要因」の分解が極めて困難なことにある。このため、定常性を確認できないファジーデータの時系列分析は多くの問題点を有すことになる。

さらに、別の機会に筆者が指摘したように、「時系列分析」の中心的命題はデータの定常性を仮定しているということであるが、上述のような従来の「ファジー回帰」では、

$$Y_j = (a_j, c_j) X_j$$

という式の推定、すなわち、「第1図」のようにXのパラメータaに±cという巾を持たせるといふものであった。したがって、この場合、xの値が大きくなるにしたがって、ファジー領域（ $k_1 \sim k_3$ ）も相対的に増大するということになり、システム自体に発散的な要因を有するということになるわけである。そのため「定常性」の仮定を満たす条件としては、ファジー領域も「定常的」でなければならないはずであり、そのためには、データに完全な定常性が求められることになる⁶⁾。

これは或意味では「ファジーモデリング」の考えと矛盾するものであり、現実のデータに仮定することが困難なものである。さらに、このようなパラメーターを前提した場合、「確率モデル」の「自己回帰モデル」における「確率過程」に対応する「ファジー領域」推定は「自己回帰モデル」の次数が高くなるほど問題の多いものとなってくる。

このような難点を克服するために、「システム全体」で1つの「ファジー領域」が設定できるような—すなわち、パラメーター毎にファジー領域が設定されるものでない—推定方法が求められるところである。

以上のように、これまでのファジーシステムを適用して「時系列分析」を行うことには多くの制約が見られるために、ここでは、新たなファジーシステムによる「時系列分析」の手法を考えることにするが、これはすでに勝木(9) (10)で提唱したものと全く違った方法である。

5) 勝木(8)参照。

6) 勝木(9)(10)参照。

4：ファジー測度論からのアプローチ

以下に述べるファジー時系列分析システムは、これまでのファジー回帰分析を時系列分析モデルに単純に適用する場合に生じる、モデルの同定問題や定常性の問題をクリアするために、可能な限り一般的な（確率論的）時系列分析モデルを活用しつつ、ファジー測度論によってファジーエリアを推定する区間解析を行おうというものである。そのため、まず「可能性分布」について考えることにしよう。

いま、ファジー数学の表記に従って y_1, y_2, y_3 のファジー集合を次のように記すことにする。

$$\pi(y_1) = \alpha_1/x_1 + \alpha_2/x_2 + \alpha_3/x_3 \quad - (23)$$

$$\pi(y_2) = \beta_1/x_1 + \beta_2/x_2 + \beta_3/x_3 \quad - (24)$$

$$\pi(y_3) = \gamma_1/x_1 + \gamma_2/x_2 + \gamma_3/x_3 \quad - (25)$$

上のこれらの式は、ファジー事象 y_i と変数 x_i とのファジー関係を示すもので、 $\alpha \beta \gamma$ は x_i が y_i であると考えられる場合のメンバシップ関数の要素とすることができるものである。すなわち、 x_i が y_i であるのは大凡のところ α (β 、 γ) の値の割合と考えることができるものである。

したがって、 y_i と x_i の関係が2次元の離散空間である場合は、

$$\pi(y, x) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & \left[\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{matrix} \right] \\ y_2 & \left[\begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right] \\ y_3 & \left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix} \right] \end{matrix} \quad - (26)$$

=R

というファジー行列（周辺分布行列）に書き換えることができる。

この行列から、「周辺可能性分布」は定義によって以下の式から算定される⁷⁾。

$$\pi_x(x) = \sup_y \pi(y, x) \quad - (27)$$

$$\pi_y(y) = \sup_x \pi(y, x) \quad - (28)$$

この (27) および (28) 式から得られる内容を

7) 田中英夫(18)pp.74-82を参照。

$$\pi_x(x) = (\pi_{x1} \quad \pi_{x2} \quad \pi_{x3}) \quad - (29)$$

$$\pi_y(y) = (\pi_{y1} \quad \pi_{y2} \quad \pi_{y3}) \quad - (30)$$

とすると、これを以下のように結合して「結合可能性分布」を得る。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \pi_{y1} \\ \pi_{y2} \\ \pi_{y3} \end{array} \right] \wedge (\pi_{x1} \quad \pi_{x2} \quad \pi_{x3}) \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \pi_{y1} \wedge \pi_{x1} & \pi_{y1} \wedge \pi_{x2} & \pi_{y1} \wedge \pi_{x3} \\ \pi_{y2} \wedge \pi_{x1} & \pi_{y2} \wedge \pi_{x2} & \pi_{y2} \wedge \pi_{x3} \\ \pi_{y3} \wedge \pi_{x1} & \pi_{y3} \wedge \pi_{x2} & \pi_{y3} \wedge \pi_{x3} \end{array} \right] \\ &= Ra \quad - (31) \end{aligned}$$

ここで、 x を原因の集合、 y を結果の集合と考えるわけであるが、このとき経済行動のように原因となる要因の時前的変化が結果である経済行動に影響を与えるということをモデリングすることは極めて重要なことであることを忘れることはできない。このような考え方は、確率モデルでは「ベイズ理論」によってモデリングされていることは周知のところである。

このベイズ・システムをファジーモデルに取り入れるために、「結合可能性分布」から「条件付可能性分布」といわれるものを導出することにしよう。これは確率モデルの「条件付確率」に相当するもので、以下の式で算定される。

$$\pi(y|x) = \pi(y, x) \cdot \delta(\pi_y(y), \pi_x(x)) \quad - (32)$$

ここで $\delta(\dots)$ は正規化の関数で、以下のような性質を持つ。

$$\delta(\pi_y(y), \pi_x(x)) = \begin{cases} 1 & ; \pi_x(x) < \pi_y(y) \\ \frac{\pi_y(y)}{\pi_x(x)} & ; \pi_x(x) > \pi_y(y) \end{cases} \quad - (33)$$

これより

$$\delta(\pi_y(y), \pi_x(x)) = (\pi_y(y) \vee \pi_x(x)) / \pi_x(x) \quad - (34)$$

とできる。

この (34) 式を用いて、「条件付可能性分布」は

$$\pi(y|x) = \begin{cases} \pi_y(y) \wedge \pi_x(x) & ; \pi_y(y) < \pi_x(x) \\ \pi(x,y) \frac{\pi_y(y)}{\pi_x(x)} & ; \pi_y(y) > \pi_x(x) \end{cases} \quad - (35)$$

となり、

$$\rho = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1} & \dots & \pi_{nm} \end{pmatrix} \quad - (36)$$

という「条件付可能性分布行列」が得られる。

y_0 の「周辺分布」を

$$y_0 = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)$$

とすれば、これと「条件付可能性分布行列」(ρ) を合成して

$$(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) \circ \rho = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) \quad - (37)$$

という新たなファジーベクトルが得られることになる⁸⁾。

ここで、仮に通常の時系列分析(確率モデル)の手法を用いて、ARモデル

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1-i} + \gamma_1 Y_{t-1-k} + \delta_1 Y_{t-1-n} + \theta_t \quad - (38)$$

を同定したとしよう。この $\lambda_i \gamma_i \delta_i$ は Y_{t-1} の Y_t に対する時間的変化を示すパラメータと考えることができる。

この $\lambda_i \gamma_i \delta_i$ は Y_{t-1} の決定を s 項ずつ時間をずらして推定して、時系列モデルのパラメータの決定に活用することを考えよう。

以下3項を例として示すと

8) \circ という記号のファジー行列演算は通常の行列演算の和を \vee 、積を \wedge に変えて計算されるが、ファジー関係システムとよばれる $\max \cdot \min$ 合成を示すものである。

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1-i} + \gamma_1 Y_{t-1-k} + \delta_1 Y_{t-1-n} + \theta_t \quad - (39)$$

$$Y_{t-1} = \lambda_2 Y_{t-2-i} + \gamma_2 Y_{t-2-k} + \delta_2 Y_{t-2-n} + \theta_{t-1} \quad - (40)$$

$$Y_{t-2} = \lambda_3 Y_{t-3-i} + \gamma_3 Y_{t-3-k} + \delta_3 Y_{t-3-n} + \theta_{t-2} \quad - (41)$$

となるものである。

ここで、 Y_t の時系列データから以下の (42)~(44) 式のファジー関係式が導出できるとしよう。この $\alpha \beta \gamma$ の値の特定は、例えば

$$Y_t = f(Y_{t-1-i})$$

の回帰式によるパラメータでも良いし、その他にファジー関係が事前にわかっているような場合は、その値を得る方法に従っても良い。

また、この各パラメータは第1項から第3項の $t-i$ 期の影響の度合いを示すものであり、これをファジー集合として考えたとき、ファジー数学の表記に従って y_1, y_2, y_3 のファジー集合を次のように記すことにする。

$$Y_t = \alpha_1 / Y_{t-1} + \alpha_2 / Y_{t-2} + \alpha_3 / Y_{t-3} \quad - (42)$$

$$Y_{t-1} = \beta_1 / Y_{t-2} + \beta_2 / Y_{t-3} + \beta_3 / Y_{t-4} \quad - (43)$$

$$Y_{t-2} = \gamma_1 / Y_{t-3} + \gamma_2 / Y_{t-4} + \gamma_3 / Y_{t-5} \quad - (44)$$

上のこれらの式は、ファジー事象 y_t と変数 y_{t-i} とのファジー関係を示すもので、 $\alpha \beta \gamma$ は y_{t-i} が y_t であると考えられる場合のメンバシップ関数の要素といえることができるものである。すなわち、 y_{t-i} が y_t でありえるのは大凡のところ $\alpha(\beta, \gamma)$ の値の割合と考えることができるものであり、これらをファジー集合として考えることができる。

したがって、これから得られるパラメータ行列

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad - (45)$$

をファジー行列に書き換えると

$$R = \begin{matrix} & x1 & x2 & x3 \\ y1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ y2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ y3 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix} \quad - (46)$$

となり、時系列分析モデルのパラメータを形成する「周辺分布行列」とすることができる。

これに前節で述べた (27)~(31) 式の方法を適用して「結合可能性分布」が算定できることになる。この行列は t-i 期の Y の t 期の Y への影響を示すもので s 項分（この例では 3 期）のゆらぎをファジー測度と考えるものであり、これを

$$Ra = \begin{matrix} & \begin{matrix} x1 & x2 & x3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \bar{\gamma}_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad - (47)$$

と表すことにしよう。

たとえば、ここで Y_t の AR モデルによるパラメータ・ベクトルを λ の周辺分布

$$(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)$$

と考えれば、

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) \circ \begin{matrix} & \begin{matrix} x1 & x2 & x3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \bar{\gamma}_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad - (48) \\ & = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) \end{aligned}$$

というパラメータ・ベクトルが得られる。これから、

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1-i} + \gamma_1 Y_{t-1-k} + \delta_1 Y_{t-1-n} + \theta_t \quad - (39)$$

$$Y_{t-1} = \lambda_2 Y_{t-2-i} + \gamma_2 Y_{t-2-k} + \delta_2 Y_{t-2-n} + \theta_{t-1} \quad - (40)$$

$$Y_{t-2} = \lambda_3 Y_{t-3-i} + \gamma_3 Y_{t-3-k} + \delta_3 Y_{t-3-n} + \theta_{t-2} \quad - (41)$$

の λ に対応する μ の縦ベクトルが得られることになる。

同様の作業を $\gamma \delta$ についても繰り返しそれぞれの対応するパラメータベクトル $\phi \rho$ を算定すると、以下の式が得られる。

$$Y_t = \mu_1 Y_{t-1-i} + \phi_1 Y_{t-1-k} + \rho_1 Y_{t-1-n} + \theta_t \quad - (39)'$$

$$Y_{t-1} = \mu_2 Y_{t-2-i} + \phi_2 Y_{t-2-k} + \rho_2 Y_{t-2-n} + \theta_{t-1} \quad - (40)'$$

$$Y_{t-2} = \mu_3 Y_{t-3-i} + \phi_3 Y_{t-3-k} + \rho_3 Y_{t-3-n} + \theta_{t-2} \quad - (41)'$$

これによって、 $\lambda \gamma \delta$ をパラメータとする Y_{t-i-k} について (42)~(44) に対応するファジー関係を特定し、(47) 式に対応するファジー行列を得る。さらに、この $\mu \phi \rho$ のそれぞれの最大値を採択し、

$$Y_t = \mu_n Y_{t-1-i} + \phi_m Y_{t-1-k} + \rho_h Y_{t-1-n} + \theta_t \quad - (49)$$

(n, m, h は 1, 2, 3 のいずれかの値である)

が得られることになる。これが時系列分析モデルのパラメータのファジーエリア上限となるのである⁹⁾。

他方、ファジーエリア下限については、「必然性定理」によって、以下のように規定できる。

集合 A と B が存在するとき、ファジー測度を g とすると

$$g(A \cup B) \geq \max \{g(A), g(B)\} \quad - (50)$$

$$g(A \cap B) \leq \min \{g(A), g(B)\} \quad - (51)$$

と定義できる。

ここで「可能性測度」を Π で示すと

$$\Pi(A \cup B) = \max \{\Pi(A), \Pi(B)\} = \Pi(A) \vee \Pi(B) \quad ; \forall A, \forall B \quad - (52)$$

として規定できる。これに対して、必然性測度とは

$$N(A \cap B) = \min \{N(A), N(B)\} = N(A) \wedge N(B) \quad ; \forall A, \forall B \quad - (53)$$

となるものである。

なお、両ファジー測度の関係は、その相対性から、

$$\Pi(A) = 1 - N(A^c) \quad - (54)$$

のように定義される¹⁰⁾。

9) ファジーエリアの上限となる理由は、「可能性分布」が $\max \cdot \min$ 演算であることから自明のところであろう。

10) A^c は集合 A の補集合を示す。A と B において、 $A \cap B = \phi$ の仮定はなされない。

また、

$$\Pi(A \cup A^c) = \Pi(A) \vee \Pi(A^c) = 1 \quad - (55)$$

であり、これに相応して、

$$N(A \cap A^c) = N(A) \wedge N(A^c) \quad - (56)$$

となる。

これより、

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c) \quad - (57)$$

であるので、

$$N(A) = \inf_{x \in A} (1 - \pi(x)) \quad - (58)$$

となる。

前に述べたように「条件付可能性分布」によって推定される時系列分析モデルのパラメータは、いわば区間推定の上限確率と同じような意味を有していると考えられる。

さて、ファジーエリアの確定のためには、さらに「下限確率」に対応するものが推定されなければならない。このために、「可能性分布」と対応した前記の「必然性定理」にもとづいた「分布」を導入したモデルを試みる必要がある。すなわち、可能性分布

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} (\pi(x)) \quad - (59)$$

に対して

$$N(A) = \inf_{x \in A} (1 - \pi(x)) \quad - (60)$$

となるものである。したがって、通常 $\Pi > N$ という関係が成立するものである。

さて、ここでの問題は、上式 (60) 式の 1 という値は A^c を A の補集合としたときの (55) 式を、前提にしているもので、

$$\Pi(A) \vee \Pi(A^c) \neq 1 \quad - (61)$$

である場合には、(60) 式は成立しないことがある。特に現実のデータに AR モデルを適用して (42)~(44) 式を導出しようとする場合は、この問題が顕著に現れるであろう。そのため、ファジー行列の「周辺可能性分布」については、

$$N(A) = \inf_{x \in A} (1 - \eta_x \pi(x)) \quad - (62)$$

のように $\pi(x)$ を正規化しておく必要がある。

この η_x は、同じ行に属するパラメータ値を ϕ で表示した場合、

$$\eta_x = \phi_{ij} / \sum \phi_{ik} \quad - (63)$$

となるものである¹¹⁾。

このように正規化したものを

$$N(A) = \inf_{x \in A} (\nu(x)) \quad - (64)$$

とする。

これより、

$$N(A) = \inf_{x \in A} (\nu(x)) \quad - (65)$$

$$\nu(x_i) = \nu(x_1) \vee \nu(x_2) \vee \dots \vee \nu(x_n) \quad - (66)$$

これから「条件付 (必然性) 分布」を求めることができる。すなわち、

$$\delta(\pi_y(y), \pi_x(x)) = (\pi_y(y) \wedge \pi_x(x)) / \pi_x(x) \quad - (67)$$

11) もし「周辺分布行列」が以下のような行列であった場合において、 $\pi(x)$ が ϕ_{12} であるケースでは、

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

η_x は以下のようなものとなる。

$$\eta_x = \phi_{12} / \sum \phi_{1k}$$

とした場合、

$$\pi(y|x) = \pi(y, x) \cdot \delta(\pi_y(y), \pi_x(x)) \quad - (68)$$

となるものである。このとき、

$$\pi(y|x) = \begin{cases} \pi_y(y) \vee \pi_x(x) & ; \pi_y(y) < \pi_x(x) \\ \pi(x, y) \frac{\pi_y(y)}{\pi_x(x)} & ; \pi_y(y) > \pi_x(x) \end{cases} \quad - (69)$$

となる。

この「条件付分布」は「条件付可能性分布」と同様のプロセスで (48) 式に対応するようなファジー・ベクトル

$$Rb = \begin{matrix} & x1 & x2 & x3 \\ y1 & \underline{\alpha}_1 & \underline{\alpha}_2 & \underline{\alpha}_3 \\ y2 & \underline{\beta}_1 & \underline{\beta}_2 & \underline{\beta}_3 \\ y3 & \underline{\gamma}_1 & \underline{\gamma}_2 & \underline{\gamma}_3 \end{matrix} \quad - (70)$$

を導出することができ、さらに (49) 式の導出と同様の方法を用いて、(39)'~(41)'に対応する式を得、そのパラメータの最小のものを採択することによってパラメータのファジーエリア下限に対応する Y の時系列モデルのパラメータの算式を得ることができる。

このようなプロセスで算定されるファジー・ベクトルが時系列分析モデルのパラメータのファジー・エリアの上下限であり、したがって、ファジーエリアはこの上限と下限の間の区間に存在するものということができるのである。

5 : むすび

以上に述べたように、「周辺結合可能性分布行列」および、それに対応する「必然性分布行列」が得られれば、時系列モデルのパラメータの「ファジー・エリア」が特定できることになる。

このような「周辺分布行列」を確率モデルの AR モデルによって得られるパラメータから構成されるケースを仮定して例示したが、もちろん、他の方法で適切な「周辺分布行列」が得られるならば、それを適用しても一向に差し支えないことはいうまでもない。例

えば、ファジー積分やファジーベイズ定理を適用した「周辺分布」の算定などが可能なのである。

また、例示した AR モデルによる方法などを含めて、パラメータが何項かずつ得られるということから、一種の時変係数モデルというべきモデルも構築することが可能である。適切に時間による変動を反映させた周辺分布のパラメータが得ることができれば、各期にその変動を内含させた時系列分析モデルのパラメータをモデルに組み込むことができ、構造変化をも確実にモデル化することができることになる。

また、この方法はモデルの同定方法が確立している「確率モデル」を援用するという方法をとっているために、VAR モデルやその他の時系列分析モデルの手法で同定されたモデルのファジー区間解析を実現できるもので、大きな可能性を示すものであると考えられるのである。

しかし、計算プロセスの複雑性については改良の余地が有ることは否めず、これについては今後の課題としておきたい。

参 考 文 献

- (1) 青木正直『時系列解析と日本経済』, 東洋経済新報社, 1984年.
- (2) 赤池弘次・北川源四郎『時系列解析の実際 I II』, 朝倉書店, 1995年.
- (3) 浅居喜代治・寺野寿郎・菅野道夫『ファジィシステム入門』, オーム社, 1987年.
- (4) 浅居喜代治 編著『ファジィ経営科学入門』, オーム社, 1992年.
- (5) 勝木太一「企業行動における意思決定構造の考察 (その1)」, 『松阪政経研究』, vol. 12, No.1, 松阪大学, 1993年.
- (6) 勝木太一「ファジー時系列解析モデルの新手法の開発と適用. (その1)」, 『松阪政経研究』, vol.15, 松阪大学, 1997年.
- (7) 勝木太一「ファジー時系列解析モデルの新手法の開発と適用 (その2)」, 『松阪政経研究』, vol.16, 松阪大学, 1998年.
- (8) 勝木太一「ファジー・タイムトレンドの推定方法」, 『松阪大学紀要』, 第22巻 第1号, 松阪大学, 2004年3月.
- (9) 勝木太一「ファジー時系列解析の新手法とその理論的条件」, *Review of Economics and Information Studies*, vol. 7, No.1・2, 岐阜聖徳学園大学, 2006年9月.
- (10) 勝木太一「ファジー時系列解析の新手法とその理論的考察」, *Review of Economics and Information Studies*, vol. 7, No.1・2, 岐阜聖徳学園大学, 2007年3月.
- (11) 勝木太一『経済統計学』, 開成出版, 1995年.

- (12) 勝木太一『経済現象の計量モデル分析』, 大学教育出版, 1997年.
- (13) 刈屋武昭『計量経済分析の基礎と応用』東洋経済新報社, 1985年.
- (14) 刈屋武昭・照井伸彦『非線形時系列分析法とその応用』, 岩波書店, 1997年.
- (15) 杉原左右一, 『時系列の統計的研究』, 東洋経済新報社, 1984年.
- (16) 杉原敏夫, 『経営・経済のための時系列分析と予測』, 税務経理協会, 1994年.
- (17) 染谷恭次郎・木下照嶽『経営分析－基礎と実践』, 森山書店, 1979年.
- (18) 田中英夫『ファジィモデリングとその応用』, 朝倉書店, 1990年.
- (19) 廣松 毅・浪花貞夫『経済時系列分析の基礎と実際』, 多賀出版, 1993年.
- (20) 水本雅晴『ファジィ理論とその応用』, サイエンス社, 1998年.
- (21) Bellmann R.E. & L.H.Zadeh, ‘Decision Making in a Fuzzy Environment’,
Management Sci.,17, 1970.
- (22) Beveridge, Stephen and Charles R. Nelson., ‘A New Approach to Decomposition
of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with
Particular Attention to Measurement of The Business Cycle.’, *Journal of
Monetary Economics* 7, North－Holland, 1981.
- (23) Cyert R.M. & J.G. March, *A Behavioral Theory of Firm*, 1963.
- (24) Denison F. Edward, *Trends in American Economic Growth 1929－1982*,
The BROOKINGSINSTITUTION, Washington, D.C., 1985.
- (25) Dubois D., ‘Linear Programming with Fuzzy Data’, in J.C.Bezdek Ed., *Analysis
of Fuzzy Infomation* Vol.3, CRC Press 1987.
- (26) Nelson R. Charles and Charles I. Plosser, ‘TRENDS AND RANDOM WALKS
IN MACROECONOMIC TIME SERIES’, *Journal of Monetary Economics* 10,
North－Holland, 1982.
- (27) Vandaele W., *Applied Time Series and Box－Jenkins Models*, Academic PRESS,
Inc., 1983.
- (28) Zadeh L.A., ‘Similarity relation and fuzzy orderings’, *Information Science*,3,
1971.
- (29) Zadeh L.A., ‘The concept of a linguistic variable and its apprication to
approximate reasoning I II III’, *Information Science*, 8－9, 1975－6.
- (30) Zadeh L.A., ‘Fuzzy sets as a basis for a theory of of possibility’, *Fuzzy Sets
and Systems*, 1, 1978.
- (31) Zellner,A., *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, John Wiley
& Sons, Inc., 1971.
- (32) Zimmermann H.J., ‘Description and Optimization of Fuzzy Systems’, *Journal
of General Systems*, 2, 1976.

- (33) Zimmermann H.J., 'Fuzzy programming and linear programming with several objective Function', *Fuzzy Sets and System*, 1, 1978.

