

確率中点スキームの MS 安定性について

齊 藤 善 弘

竹 内 聖 彦

概 要

本稿では 2 段階スキームである確率中点スキームを取り上げ、MS 安定性解析を行う。確率中点スキームは、常微分方程式の中点則を確率微分方程式に拡張したスキームとみることができる。中点則は数値的不安定現象が起り不安定な公式であることがよく知られているが、解析の結果、確率中点スキームが MS 不安定であることがわかる。

1. はじめに

確率微分方程式は種々の現象を数学的に記述することができ、物理学や工学をはじめとして金融工学にも応用され、現在注目されている。応用面では、確率微分方程式の解の定量化、つまり数値的に解くことが要求され、確率微分方程式の数値解法について広く研究されている。確率微分方程式の数値解法には、常微分方程式の初期値問題と同様の解法、すなわち、テイラー型、ルンゲ・クッタ型、多段階スキームなどが提案されている。これらの数値解法による解の安定性について研究されているが、Saito & Mitsui (1996) は MS 安定性 (Mean-Square stability) を提案し、数値解法のうちテイラー型とルンゲ・クッタ型について解析を行った [10]。本稿では、多段階スキームの一つである確率中点スキームについて、MS 安定性解析を行う。まず、常微分方程式の中点則が不安定な公式であることを概説する (2 節)。次に確率中点スキームについて述べる (3 節)。そして、確率中点スキームの MS 安定性解析を行い、MS 不安定になることを証明する (4 節)。最後に、数値結果と多段階スキームに対する MS 安定性解析の手順や今後の課題について触れる (5 節)。

2. 中点則の数値的安定性

1 次元の常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

に対して、中点則 (midpoint rule) は

$$x_{n+2} = x_n + 2hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \quad (2)$$

で与えられる。この方法では、(出発値と呼ばれる) x_1 を一段法 (たとえばオイラー法) で求めてから中点則を適用させることにより、ステップ幅 $h > 0$ で定まる等間隔のステップ点 $t_n = nh$ における近似解 $\{x_n\}$ が得られる。

中点則の数値的安定性をみるために、単独のテスト方程式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad (t > 0) \quad (3)$$

を考える。ここで λ は負の実数にとる。解は $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ と表されることから、

$$x(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4)$$

をみtas。方程式(3)に数値解法を適用して得られる数値解 $\{x_n\}$ に対しても、(4)と同様な性質

$$x_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5)$$

をもつことが望まれる。(3)に中点則を適用すると、

$$x_{n+2} = x_n + 2\lambda h x_{n+1} \quad (6)$$

の3項漸化式が得られ、次の同値なベクトル形式の漸化式を導くことができる。

$$\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda h & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2\lambda h & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

とおく。性質(5)は $[x_{n+1}, x_n]^T \rightarrow [0, 0]^T$ をも意味するから、(5)をみたすための条件は行列 \mathbf{R} の固有値 ζ_1, ζ_2 に対し、それらの絶対値がすべて1より小さくなることである。固有値は、

$$|\mathbf{R}-\zeta I| = \begin{vmatrix} 2\lambda h - \zeta & 1 \\ 1 & 0 - \zeta \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda h\zeta - \zeta^2 = 0$$

より、 $\lambda h + \sqrt{1 + (\lambda h)^2} = \zeta_1$ 、 $\lambda h - \sqrt{1 + (\lambda h)^2} = \zeta_2$ となる。 $\lambda h < 0$ より、 $0 < \zeta_1 < 1$ 、 $\zeta_2 < -1$ がわかり、中点則が任意の $\lambda h < 0$ について性質(5)を保持しない（絶対安定区間を持たない[7]）。この結果は、3項漸化式を解いて得られる結果と一致する[7, 8]。

3. 確率中点スキーム

1次元かつ1個の標準ウィナー過程をもつ伊藤型確率初期値問題

$$dX = f(t, X)dt + g(t, X)dW(t), \quad t \in [0, T], \quad X(0) = x_0 \quad (9)$$

を考える。問題(9)に対して確率中点スキームは、次の形式で与えられる。

$$X_{n+2} = X_n + 2f(t_{n+1}, X_{n+1})h - f'(t_n, X_n)g(t_n, X_n)\Delta W_n h + V_{n+1} + V_n \quad (10)$$

ここで

$$\begin{aligned} V_n = & g(t_n, X_n)\Delta W_n + \left[fg' + \frac{1}{2}g^2g'' \right](t_n, X_n)\{\Delta W_n h - \Delta Z_n\} \\ & + [f'g](t_n, X_n)\Delta Z_n + \frac{1}{2}[gg'](t_n, X_n)\{(\Delta W_n)^2 - h\} \\ & + \frac{1}{2}[g(gg')'](t_n, X_n)\left\{\frac{1}{3}(\Delta W_n)^2 - h\right\}\Delta W_n \end{aligned}$$

である。このスキームに現れる ΔW_n 、 ΔZ_n はガウス型の確率変数であり、次の性質をみたす。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta W_n] = \mathbf{E}[\Delta Z_n] = 0, \quad \mathbf{E}[(\Delta W_n)^2] = h, \\ \mathbf{E}[(\Delta Z_n)^2] = \frac{h^3}{3}, \quad \mathbf{E}[\Delta W_n \Delta Z_n] = \frac{h^2}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

これらの確率変数の詳細は文献[4]または[8]を見よ。スキーム(10)は、正式には強い1.5次の2段階スキーム (two-step order 1.5 strong scheme) と言うが[4]、決定論的な部

分が中点則になるため、本稿では簡単に“確率中点スキーム”と呼ぶことにする。確率中点スキームは、ミルシュテインにより加法的ノイズの問題（(9)において $g(t, X)$ が $g(t)$ の場合）に対する2段階スキーム族の1方法として提案された[6]。そして、クレーデン・プラーテン[4]により一般の初期値問題(9)に対して拡張された。その導出方法は、次の強い1.5次の陰的テイラー・スキームの族（family of implicit order 1.5 strong Taylor sheme）を利用する[4, 5]。

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = & X_n + \{\alpha f(X_{n+1}) + (1-\alpha)f(X_n)\}h \\
& + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \left\{ \beta \left[ff' + \frac{1}{2}g^2f'' \right] (X_{n+1}) + (1-\beta) \left[ff' + \frac{1}{2}g^2f'' \right] (X_n) \right\} h^2 \\
& + g(X_n)\Delta W_n + \left[fg' + \frac{1}{2}g^2g'' \right] (X_n) \{\Delta W_n h - \Delta Z_n\} \\
& + [f'g](X_n) \{\Delta Z_n - \alpha \Delta W_n h\} + \frac{1}{2} [gg'] (X_n) \{(\Delta W_n)^2 - h\} \\
& + \frac{1}{2} [g(gg')'] (X_n) \left\{ \frac{1}{3} (\Delta W_n)^2 - h \right\} \Delta W_n
\end{aligned} \tag{12}$$

ここでパラメータ $\alpha, \beta \in [0, 1]$ である。導出にあたり、まずスキーム(12)において $\alpha = 1, \beta = 1$ とおくと

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = & X_n + f(X_{n+1})h - \frac{1}{2} \left[ff' + \frac{1}{2}g^2f'' \right] (X_{n+1})h^2 \\
& + g(X_n)\Delta W_n + \left[fg' + \frac{1}{2}g^2g'' \right] (X_n) \{\Delta W_n h - \Delta Z_n\} \\
& + [f'g](X_n) \{\Delta Z_n - \Delta W_n h\} + \frac{1}{2} [gg'] (X_n) \{(\Delta W_n)^2 - h\} \\
& + \frac{1}{2} [g(gg')'] (X_n) \left\{ \frac{1}{3} (\Delta W_n)^2 - h \right\} \Delta W_n
\end{aligned}$$

今度は、次のステップでのスキーム(12)において、 $\alpha = 0, \beta = 0$ とすると

$$\begin{aligned}
X_{n+2} = & X_{n+1} + f(X_{n+1})h + \frac{1}{2} \left[ff' + \frac{1}{2}g^2f'' \right] (X_{n+1})h^2 \\
& + g(X_{n+1})\Delta W_{n+1} + \left[fg' + \frac{1}{2}g^2g'' \right] (X_{n+1}) \{\Delta W_{n+1} h - \Delta Z_{n+1}\} \\
& + [f'g](X_{n+1})\Delta Z_{n+1} + \frac{1}{2} [gg'] (X_{n+1}) \{(\Delta W_{n+1})^2 - h\} \\
& + \frac{1}{2} [g(gg')'] (X_{n+1}) \left\{ \frac{1}{3} (\Delta W_{n+1})^2 - h \right\} \Delta W_{n+1}
\end{aligned}$$

上の二式は一見煩雑に見えるが、確率中点スキームに現れる V_n を使うと、それぞれ

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n) - \frac{1}{2} \left[ff' + \frac{1}{2} g^2 f'' \right] (X_{n+1}) h^2 - [f'g](X_n) \Delta W_n h + V_n, \quad (13)$$

$$X_{n+2} = X_{n+1} + f(X_{n+1}) + \frac{1}{2} \left[ff' + \frac{1}{2} g^2 f'' \right] (X_{n+1}) h^2 + V_{n+1} \quad (14)$$

と、簡単に記述できる。(13)と(14)の辺々を足して整理すると、確率中点スキーム(10)が得られる。

4. 確率中点スキームの MS 安定性解析

確率中点スキームに対する MS 安定性を見よう。文献[10]に従い、乗法的ノイズをもつテスト方程式

$$dX = \lambda X dt + \mu X dW(t), \quad X(0) = 1 \quad (15)$$

を考える。本稿では、 $\lambda < 0$ 、 $\mu \geq 0$ の実数とする。方程式(15)の解析解は

$$X(t) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right) \quad (16)$$

となる。テスト方程式が1次元であるから、MS 安定性は解の2次モーメントに関する安定性とみることができる。テスト方程式(15)の解の2次モーメント $Y(t) = \mathbf{E}[(X(t))^2]$ は、常微分方程式

$$dY = (2\lambda + \mu^2) Y dt, \quad Y(0) = 1 \quad (17)$$

をみたま[2, 4]。よって、 $2\lambda + \mu^2 < 0$ ならば

$$Y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (18)$$

そこで $2\lambda + \mu^2 < 0$ のとき、数値解の2次モーメント $Y_n = \mathbf{E}[(X_n)^2]$ について

$$Y_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (19)$$

をみtasことが期待される (MS 安定性)。この数値スキームが MS 安定となるための λ , μ , h に関する条件 (安定条件) を調べることを MS 安定性解析と呼ぶ[10]。確率中点スキームの MS 安定性を調べるには、まずスキーム(10)をテスト方程式(15)に適用する。

$$X_{n+2} = X_n + 2\lambda X_{n+1}h - \lambda\mu X_n \Delta W_n h + V_{n+1} + V_n \quad (20)$$

ここで、

$$\begin{aligned} V_n &= \mu X_n \Delta W_n + \lambda\mu X_n \{\Delta W_n h - \Delta Z_n\} + \lambda\mu X_n \Delta Z_n \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu^2 X_n \{(\Delta W_n)^2 - h\} + \frac{1}{2}\mu^3 X_n \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W_n)^2 - h \right\} \Delta W_n \\ &= (1 + \lambda h)\mu X_n \Delta W_n + \frac{1}{2}\mu^2 X_n \{(\Delta W_n)^2 - h\} + \frac{1}{2}\mu^3 X_n \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W_n)^2 - h \right\} \Delta W_n \end{aligned}$$

辺々を2乗すると、

$$\begin{aligned} (X_{n+2})^2 &= \{(X_n + 2\lambda X_{n+1}h) - \lambda\mu X_n \Delta W_n h + V_{n+1} + V_n\}^2 \\ &= (X_n + 2\lambda X_{n+1}h)^2 + (-\lambda\mu X_n \Delta W_n h)^2 + (V_{n+1})^2 + (V_n)^2 \\ &\quad + 2 \cdot (X_n + 2\lambda X_{n+1}h) \cdot (-\lambda\mu X_n \Delta W_n h) + 2 \cdot (X_n + 2\lambda X_{n+1}h) \cdot V_{n+1} \\ &\quad + 2 \cdot (X_n + 2\lambda X_{n+1}h) \cdot V_n + 2 \cdot (-\lambda\mu X_n \Delta W_n h) \cdot V_{n+1} \\ &\quad + 2 \cdot (-\lambda\mu X_n \Delta W_n h) \cdot V_n + 2 \cdot V_{n+1} \cdot V_n \end{aligned}$$

右辺に現れる項のうち、次にあげる項の期待値は明らかに0になる。

$$\begin{aligned} &2 \cdot (X_n + 2\lambda X_{n+1}h) \cdot (-\lambda\mu X_n \Delta W_n h), \quad 2 \cdot (X_n + 2\lambda X_{n+1}h) \cdot V_{n+1}, \\ &2 \cdot (X_n + 2\lambda X_{n+1}h) \cdot V_n, \quad 2 \cdot (-\lambda\mu X_n \Delta W_n h) \cdot V_{n+1}, \quad 2 \cdot V_{n+1} \cdot V_n \end{aligned}$$

残りの確率変数を含む項は、 ΔW_n の性質

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta W_n] &= \mathbf{E}[(\Delta W_n)^3] = \mathbf{E}[(\Delta W_n)^5] = 0, \\ \mathbf{E}[(\Delta W_n)^2] &= h, \quad \mathbf{E}[(\Delta W_n)^4] = 3h^2, \quad \mathbf{E}[(\Delta W_n)^6] = 15h^3 \end{aligned}$$

を使うと、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(-\lambda\mu X_n \Delta W_n h)^2] &= (\lambda\mu)^2 h^3 \mathbf{E}[(X_n)^2], \\ \mathbf{E}[(V_{n+1})^2] &= \left\{ (1+\lambda h)^2 \mu^2 h + \frac{1}{2} \mu^4 h^2 + \frac{1}{6} \mu^6 h^3 \right\} \mathbf{E}[(X_{n+1})^2], \\ \mathbf{E}[(V_n)^2] &= \left\{ (1+\lambda h)^2 \mu^2 h + \frac{1}{2} \mu^4 h^2 + \frac{1}{6} \mu^6 h^3 \right\} \mathbf{E}[(X_n)^2], \\ \mathbf{E}[2 \cdot (-\lambda\mu X_n \Delta W_n h) \cdot V_n] &= \{-2\lambda\mu^2 h^2 - 2(\lambda\mu)^2 h^3\} \mathbf{E}[(X_n)^2]\end{aligned}$$

と計算できる。よって、最終的に

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(X_{n+2})^2] &= \left\{ 4(\lambda h)^2 + (1+\lambda h)^2 \mu^2 h + \frac{1}{2} \mu^4 h^2 + \frac{1}{6} \mu^6 h^3 \right\} \mathbf{E}[(X_{n+1})^2] \\ &\quad + \left\{ 1 + \mu^2 h + \frac{1}{2} \mu^4 h^2 + \frac{1}{6} \mu^6 h^3 \right\} \mathbf{E}[(X_n)^2] \\ &\quad + 4\lambda h \mathbf{E}[X_{n+1} X_n]\end{aligned}\tag{21}$$

を得る。 $Y_n = \mathbf{E}[(X_n)^2]$ および、

$$\begin{aligned}A(h; \lambda, \mu) &= 4(\lambda h)^2 + (1+\lambda h)^2 \mu^2 h + \frac{1}{2} \mu^4 h^2 + \frac{1}{6} \mu^6 h^3, \\ B(h; \lambda, \mu) &= 1 + \mu^2 h + \frac{1}{2} \mu^4 h^2 + \frac{1}{6} \mu^6 h^3\end{aligned}$$

とおくことで、(21)は

$$Y_{n+2} = A(h; \lambda, \mu) Y_{n+1} + B(h; \lambda, \mu) Y_n + 4\lambda h \mathbf{E}[X_{n+1} X_n]$$

と表せる。ベクトル形式の漸化式の導出を試みると、 $\mathbf{E}[X_{n+1} X_n]$ がうまく取り込めない。

そこで、 $\mathbf{E}[X_{n+2} X_{n+1}]$ と $\mathbf{E}[X_{n+1} X_n]$ との関係式を導く必要がある。これは(20)式の両辺に X_{n+1} を掛け、その期待値をとることにより得られる。以上から、次の漸化式を得る。

$$\begin{bmatrix} Y_{n+2} \\ Y_{n+1} \\ \mathbf{E}[X_{n+2} X_{n+1}] \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{MS} \begin{bmatrix} Y_{n+1} \\ Y_n \\ \mathbf{E}[X_{n+1} X_n] \end{bmatrix}\tag{22}$$

ここで \mathbf{R}_{MS} は 3 次正方行列で、

$$\mathbf{R}_{MS} = \begin{bmatrix} A(h; \lambda, \mu) & B(h; \lambda, \mu) & 4\lambda h \\ 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda h & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$Y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ならば、コーシー・シュバルツの不等式

$$|\mathbf{E}[X_{n+1}X_n]| \leq (\mathbf{E}[(X_{n+1})^2])^{1/2} (\mathbf{E}[(X_n)^2])^{1/2}$$

により、 $\mathbf{E}[X_{n+1}X_n] \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。よって、性質(19)は $[Y_{n+1}, Y_n, \mathbf{E}[X_{n+1}X_n]]^T \rightarrow [0, 0, 0]^T$ を意味する。ゆえに、2 節の安定性解析と同様、行列 \mathbf{R}_{MS} の固有値を調べればよい。固有値は、

$$|\mathbf{R}_{MS} - \zeta I| = 0$$

の根で、上式を整理すると

$$-B + \{-A + B + 8(\lambda h)^2\}\zeta + (1+A)\zeta^2 - \zeta^3 = 0$$

\mathbf{R}_{MS} の固有値を $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ とすると、すべての固有値の絶対値が 1 より小さい条件を調べることになる。ところが 3 次方程式の解と係数の関係から、

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = -B(h; \lambda, \mu)$$

が得られ、 $\mu \geq 0, h > 0$ であるから、

$$B(h; \lambda, \mu) = 1 + \mu^2 h + \frac{1}{2} \mu^4 h^2 + \frac{1}{6} \mu^6 h^3 \geq 1$$

がわかる。これは $|\zeta_1|, |\zeta_2|, |\zeta_3|$ のうち少なくとも一つは、1 以上であることを示している。ゆえに確率中点スキームは、 $h > 0, \lambda h < 0, 2\lambda + \mu^2 < 0$ をみたす任意の組 $(h; \lambda, \mu)$ に対して MS 安定となりえず、 MS 不安定であることが証明された。

5. まとめと今後の課題

乗法的ノイズのテスト方程式に対して確率中点スキームの MS 安定性を調べ、確率中点スキームが MS 安定となりえないことが証明された。ここで、数値実験によりこの事実を確かめてみよう。テスト方程式(15)において $\lambda = -1$ 、 μ を 0.0、0.5、1.0 と選び ($2\lambda + \mu^2 < 0$ に注意)、ステップ幅 $h = 0.01$ 、 $T = 10$ まで確率中点スキームを適用した数値結果を図 1 に示す。各グラフの縦軸を $\log_{10} Y$ にとっている。また、 $\mu = 0.0$ の場合 (上図) は中点則の結果である (文献[8]を参照。ただし、解を 2 乗していることに注意)。図 1 からノイズの大きさ (μ の値) を増やしても不安定現象が解消されず、むしろその程度が大きくなることがわかる。

今後の課題として、他の多段階スキームに対する MS 安定性解析が残る。確率中点スキームは 2 段階だが、他の 2 段階スキームに対しても MS 安定性解析が同様に行える。その場合、(22) と類似した漸化式が導かれ、行列 \mathbf{R}_{MS} がスキームに対応し定まる。この行列により MS 安定性が調べられるから、行列 \mathbf{R}_{MS} を “MS 安定性行列 (MS-stability matrix)” と呼ぶことにする。2 段階スキームに対する MS 安定性を次のように定義するのは自然であろう。

定義 1 ある組 $(h; \lambda, \mu)$ について、2 段階スキームで定まる MS 安定性行列 \mathbf{R}_{MS} の固有値 $\zeta_i (i=1, 2, 3)$ が条件

$$|\zeta_i| < 1 \quad (i=1, 2, 3)$$

をみたすならば、2 段階スキームはその組 $(h; \lambda, \mu)$ について MS 安定 (mean-square stable) という。上式が成り立たなければ、その組 $(h; \lambda, \mu)$ について MS 不安定 (mean-square unstable) という。

3 段階以上のスキームや陰的スキームに対しても同様に MS 安定の定義ができ、一般の多段階スキームに対する MS 安定性解析が可能である。確率中点スキームは MS 安定となる組 $(h; \lambda, \mu)$ の集合 (MS 安定領域と呼ぶ) が空集合となったが、他の多段階スキームには MS 安定領域が存在する可能性がある。常微分方程式の線型多段階法 (特に 3 段階以上) に対する安定性解析から想像できるように [7]、多段階スキームに対する MS 安定性解析は、さらに複雑かつ困難になることが予想される。常微分方程式の場合、代数的手法を使用しているが、その手法の活用は当然として、さらなる工夫が必要となるであろう。最後に、テスト方程式において $\lambda - \mu^2/2$ の条件の下、確率中点スキームの漸近安定性 (T 安定性と呼ぶ [9, 11]) について調べるのが興味深いのが、文献 [1, 3] から推察されるように難題となるであろう。

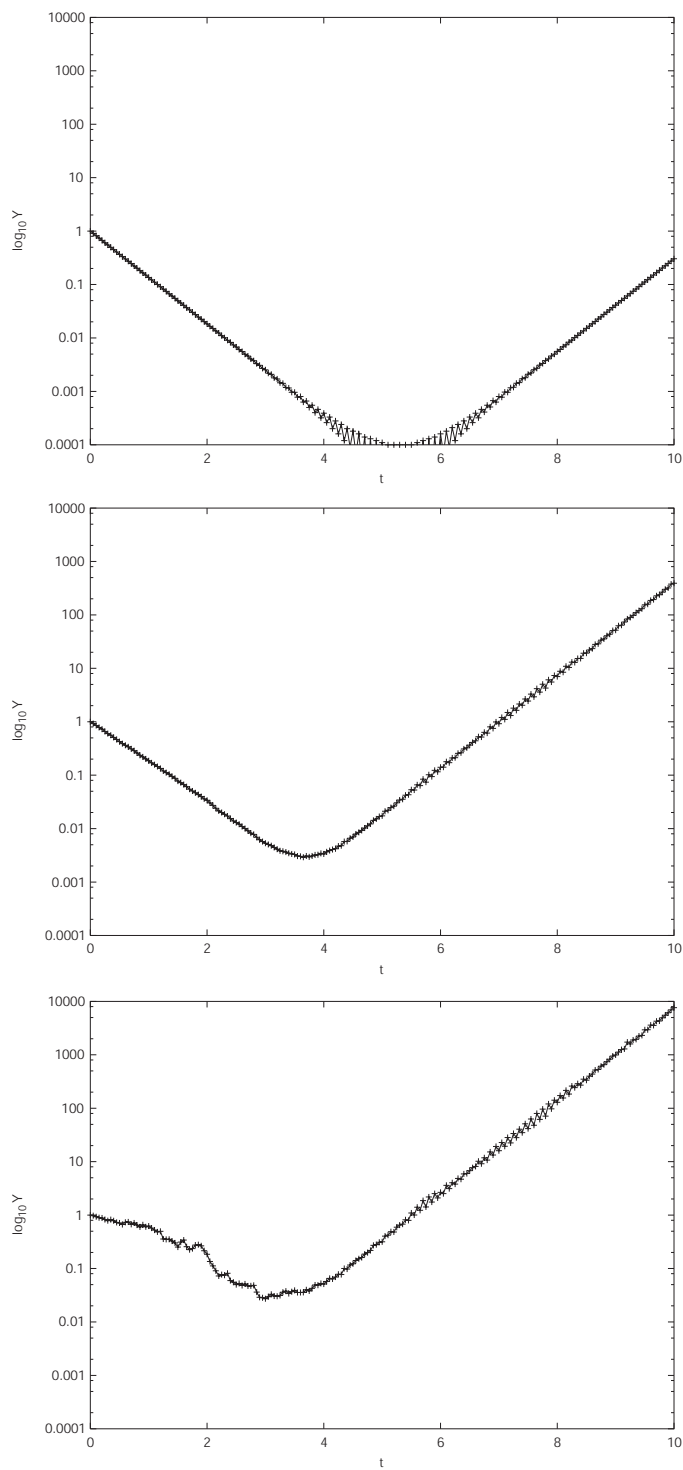


図1. テスト方程式(15)の確率中点スキームによる結果
(上: $\mu = 0.0$, 中: $\mu = 0.5$, 下: $\mu = 1.0$)

参考文献

- [1] Bryden, A. and Higham, D. J., 2003, “On the boundedness of asymptotic stability regions for the stochastic theta method”, *BIT*, **43**, pp.1-6
- [2] Gard, T. C., 1988, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker
- [3] Higham, D. J., 2000, “Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **38**, pp. 753-769
- [4] Kloeden, P. E., and Platen, E., 1992, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag
- [5] Kloeden, P. E., and Platen, E., 1992, “Higher order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations ”, *J. Statist. Phys.* Vol.66, pp.283-314
- [6] Milstein, G. N., 1995, *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Kluwer
- [7] 三井斌友、『常微分方程式の数値解法』、岩波書店、2003
- [8] 三井斌友、小藤俊幸、齊藤善弘、『微分方程式による計算科学入門』、共立出版、2004
- [9] Saito, Y. and Mitsui, T., 1993, “T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations”, *WSSIAA*, **2**, pp. 333-344
- [10] Saito, Y. and Mitsui, T.,1996, “Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations”, *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 33, pp. 2254-2267
- [11] 齊藤善弘、「オイラー・丸山簡易スキームの数値的安定性」、*Review of Economics and Information Studies*, Vol.5.No1・2、2004、pp.99-110