

視角360度の監視員による  
衝立てのある直多角形ギャラリーの監視問題  
——単純衝立ての場合に関する一考察——

糟谷 咲子・松本 忠博\*・後藤 宗弘\*

**An Art Gallery Problem to Place Guards with a Visual Angle of 360  
Degrees to the Rectilinear Art Gallery with Screens**

——A Case Considering that Screens are Simple——

**Sakiko Kasuya · Tadahiro Matsumoto · Munehiro Goto**

Summary

We have proved in a previous paper that the number of the guards with a visual angle of  $90^\circ$  necessary and occasionally sufficient to see the entire interior of a rectilinear polygon (gallery) of  $n$  vertices having some screens is  $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ , where the screens are placed in parallel or at a right angle to the gallery walls. In the above formula,  $m=4p+2q$ ,  $p$  and  $q$  are determined by the shape of the screens.

We prove here that the number of guards with a visual angle of  $360^\circ$  sufficient to see the entire interior of a rectilinear polygon (gallery) of  $n$  vertices having  $k$  simple screens is  $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ , where the screens are placed in parallel or at a right angle to the gallery walls.

Received Oct. 31, 1998.

Key words: visibility, rectilinear polygon, art gallery problem, guard with limited visual angle, simple screen

1 は じ め に

アートギャラリー監視問題とは、 $n$ 個の辺で構成された多角形領域の内部をギャラリーに見立てて、点光源あるいは監視員を配置し、点光源でくまなく照射、あるいは監視員により監視

---

\*岐阜大学工学部 Faculty of Engineering, Gifu University, 1-1 Yanagido, Gifu-shi, 501-1193 Japan

する際、何個の光源あるいは何人の監視員が必要かを問う問題である。

ギャラリーが単純 $n$ 直多角形 (simple rectilinear polygon with  $n$  edges) の場合には、必要十分な監視員の数が、 $\lfloor n/4 \rfloor$ 人であることが知られている [1]、[2]。ただし、 $\lfloor x \rfloor$ は実数 $x$ の整数部分である。

ギャラリーに $h$ 個の穴がある場合でも、ギャラリー全体の辺数および穴を構成する辺数の総数が $n$ であるとき $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の点監視員の数が必要にして十分であり [3]、さらに視野を90度に制限された監視員を壁に配置するという制限をつけても $\lfloor (n+2h)/4 \rfloor$ 人でギャラリー内部をくまなく監視することができ、この人数は必要かつ十分な値であることが示されている [4]、[5]。

[6] では、同様な視角を90度に制限された監視員を直多角形に配置する際に、より少ない人数の監視員を配置することも考慮して、壁に $\lfloor n/4 \rfloor$ 人以下の監視員を具体的に配置するアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは [5] とほぼ同時に発表されている。

[7] では、直多角形ギャラリーの内部に衝立て (screen) が存在し視界が邪魔される場合に、視角が90度に制限された監視員をギャラリーの辺 (壁) に配置する際に必要十分となる数と、より少ない人数を配置するための方法を示した。

本論文では、衝立てのある直多角形に、視角が限定されない (360度である) 監視員を配置するときに必要十分となる人数を与えた。また衝立ての配置によっては、この必要十分な人数よりも明らかに少ない人数で監視できる場合がある。そこで、より少ない人数を配置して監視する方法も示す。監視員の視角が限定されないことにより、衝立てという視界を邪魔するものが存在しても、視角が90度のときに比べ、より少ない監視員を配置して監視することができる可能性があることが明らかにされる。

2節では、以下の議論に必要な言葉の定義を与える。3節では、監視員の視角が360度である場合の配置問題について考察する。4節では、衝立ての配置によってより少ない人数の監視員で監視できる場合について考察する。5節では、これらを踏まえた配置アルゴリズムを述べる。

## 2 準備

以下の議論に必要な言葉の定義を与える。互いに直交する $n$ 個の辺で構成される多角形を $n$ 直多角形と呼ぶ。多角形の内部をギャラリーと呼ぶ。ギャラリーの頂角 (vertex) のうち、90度のものをコーナー (corner)、270度のものをリフレクス (reflex) という。ギャラリー内部には衝立てと呼ばれる障壁が存在する。この衝立てをここでは木 (tree) と考える (図1参照)。ギャラリーの辺と頂点及び衝立てを合わせて壁という。

監視員 (guard) は、ギャラリー内の任意の点に配置されてギャラリー内を監視する。監視員の配置場所が特にギャラリーの頂点だけに制限される場合を頂点監視員 (vertex guard) という。

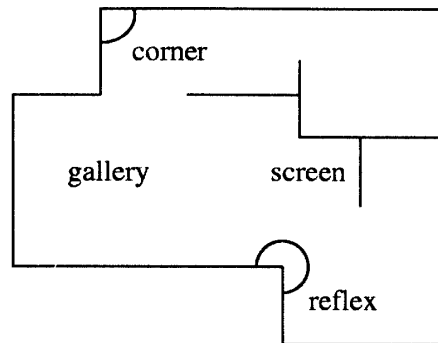


図1 衝突のあるギャラリーの例

これに対し、配置場所に制限が無く任意の点に配置される監視員、すなわちギャラリーの壁と頂点ならびにギャラリー内部の任意の点に配置できる監視員を特に点監視員（point guard）ともいう。本論文では、監視員は、頂点および壁上に配置される。監視員が1度に監視することのできる視野の角度を視角という。

また図2に示された領域（a）、（b）をそれぞれ、長方形、L型領域という。これらは図に示されたコーナーに監視員を配置すればそれぞれ1人の監視員で監視可能である。

リフレクスを始点とし伸長した補助線により、ギャラリーを分割する。このようにして分割されたギャラリーを、元のギャラリーに対してサブギャラリーという。水平あるいは垂直補助線と辺（ギャラリーの壁）により、ギャラリー内部は $\lfloor n/4 \rfloor$ 個の長方形あるいはL型領域に分割することかできる [1]、[2] ので、その各々に1人の監視員を配置することで、ギャラリー全体を監視できる。

衝突では、ギャラリー内の任意の位置に、ギャラリーの壁に平行または垂直に配置するものとし、厚みは考えない。また、衝突では壁に接していなくてもよいものとする。ここで衝突をノード（node）と枝を持つ木として考える。ノードに出入りする枝の数を次数（degree）とすると、ノードには次数1、2、3、4の4種類がある（図3、図4参照）。図の①②③④は、ノードの次数を表す。次数1のノードを葉という。図4（a）のように次数1の葉2

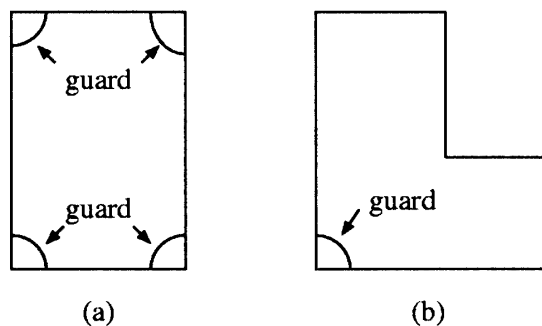


図2 長方形 (a) とL型図形 (b)

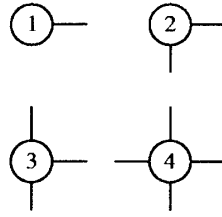


図3 次数1、2、3、4のノードの例

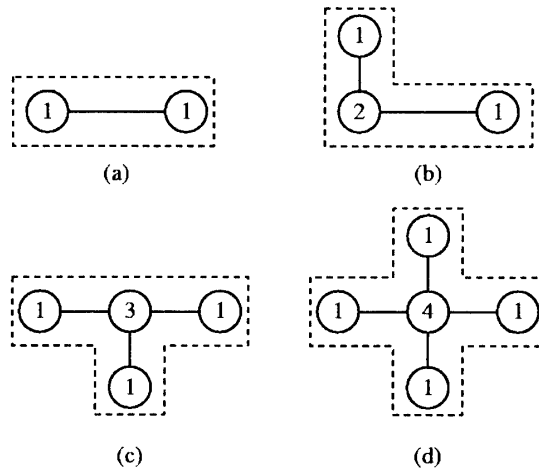


図4 衝立ての例

個だけで構成される衝立てを単純衝立て (simple screen) と呼ぶ。

### 3 視角360度の監視員の配置問題

#### 3.1 十分性の検証

$n$ 辺直多角形で囲まれたギャラリー内部に、壁に平行または垂直に衝立てが配置されたとき、ギャラリーの壁（辺または頂点）上に、視角が90度に限定された監視員を配置し、内部をくまなく監視する際に、必要十分な監視員の人数は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ であることが示されている [7]。ただし、 $m=4p+2q$ であり、衝立てを木とみたとき木の次数4のノードの個数を $p$ 、それ以外のノードの個数を $q$ としている。

監視員の視野が制限されていないとき、内部を監視するのに十分な監視員の人数は、[7]の視角90度の監視員の配置位置の各々に視角360度の監視員を配置すれば監視できることから、 $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ で十分であることはあきらかである。

ここでは視角が360度であることによって、視角が90度のときに比べ、より少ない監視員を配置してギャラリー内部を監視できることを示す。

本論分では特に衝立てが単純衝立てである場合について考察した。衝立てが単純衝立てで

ある場合、衝立ての個数を $k$ 個とすると、衝立て1本ごとに $m=4$ であることから、十分な監視員数は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor + k$ であって、単純衝立て1個ごとに監視員が1人増えることになる。しかし、監視員の視角が360度であることにより、衝立てが増えても監視員を増やす必要が無い場合があり、このとき、十分な監視員は $\lfloor n/4 \rfloor + k$ より小さくなることを示す。

十分な監視員数を検討するには、[6]、[7]と同様ギャラリーをサブギャラリーに分割し、その各々のサブギャラリーに監視員を配置すればよい。ここで監視員の視角が90度であるとき、長方形図形およびL型図形に分割されたサブギャラリーを監視するために配置される位置は、監視員がpoint guardであっても境界上の guardであっても図2のコーナーであった。これに対し、視角が360度の場合には内部全体を監視可能となる配置位置は図5のようになる。監視員がpoint guardの場合は図5 (a)の斜線部のどこか、監視員が境界上の guardの場合は図5 (b)の長方形図形では辺上、L型図形では図形中央の正方形部のリフレクスおよびその正方形の辺とL型図形の辺の交点となるL型辺上に監視員を配置したときその内部を1人で監視できる。この領域を監視員配置可能域という。初めにサブギャラリーに単純衝立てが1個存在する場合を考える。

**場合1** 図6のように $n=4u$ の長方形サブギャラリーに単純衝立てが1個存在する場合、360度の視角を監視員が持つことで視角が90度である場合と違って衝立ての影響を受けない。すなわち、このときは視角360度の監視員を衝立ての端点または、葉の延長線とギャラリーの壁との交点のいずれかに監視員を置けば衝立てがない場合から人数を増やすことなく監視できる。

**場合2**  $n=4u+2$ のL型サブギャラリーに単純衝立てが1個存在する場合には、衝立ての位置により監視員が増す場合と増さない場合がある。

単純衝立てが図7のように監視員配置可能域の境界に対し垂直で、葉を延長した補助線と監視員配置可能域とに交点があるときは、その交点上に監視員を置けば監視員の数を増やす

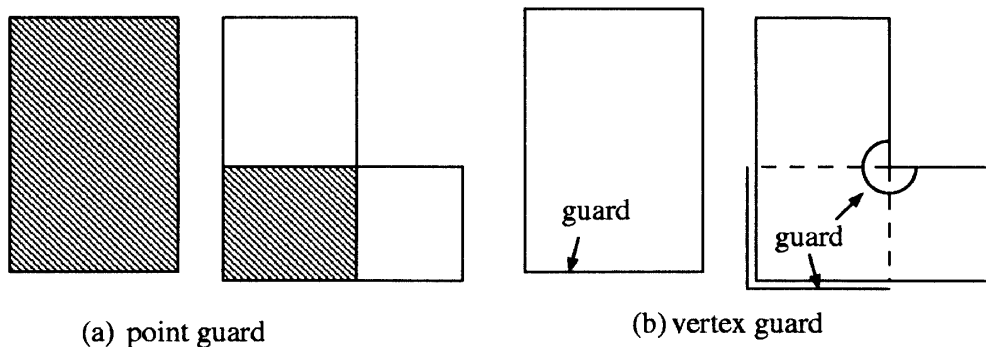


図5 視角360度の監視員の配置可能域

ことなく監視できる。特にここで検討している頂点監視員の場合図で示されるギャラリーの壁または衝立ての端の点のどちらかに配置すればよい。

場合3 場合2に対し図8のような場合には、監視員配置可能域に平行な衝立ての葉を伸ばした延長線の補助線によりL型図形をカットし、新たにできたサブギャラリー（斜線域）に監視員を配置しなければならないので、衝立てを置くことにより、必ず監視員を増やさなければならない。

すなわち、ギャラリーに衝立てが存在するときには [7] と同様にギャラリーの葉を延長した

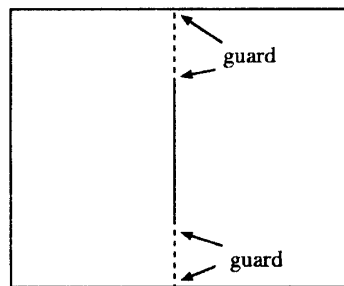


図6 監視員を増やさない衝立ての配置例 (1)

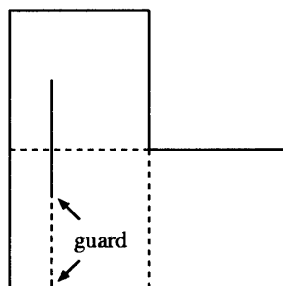


図7 監視員を増やさない衝立ての配置例 (2)

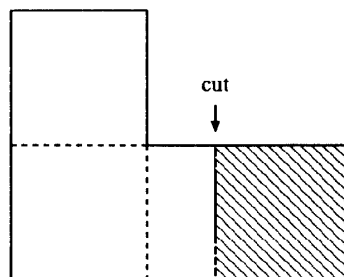


図8 監視員を増やす衝立ての配置例

補助線によりギャラリーをサブギャラリーに分割して考えることができる。監視員の視角が360度の場合には、上記の場合1、場合2のように、隣接する2個のサブギャラリーを同時に1人の監視員で監視できる場合があり、このとき2個のサブギャラリーをまとめて1人の監視員を配置することができる。

複数の単純衝立てが存在する場合も同様に考えることができるが、2個以上の単純衝立てが存在する場合には必ず2個1組で場合1、場合2のようにまとめることができる。

たとえば図9のように衝立てが位置するとき、図8の場合と同様にして監視員配置可能域の境界と平行な衝立ての葉を伸ばした補助線で、監視員配置可能域から領域の端に向かってサブギャラリーを分割していく。図9 (a) のカット線上の衝立ての右にある監視員配置可能域に平行な衝立て、および図9 (b) (c) のカット線上の衝立ての左右にある監視員配置可能域に垂直な衝立ては監視員の人数を増やさない。これは単純衝立てが監視員配置可能域の境界に対し垂直な場合、葉を伸ばした補助線により図6のようにサブギャラリーがまとめられることから監視員を増やさないからである。よってこれらの場合、2人で監視できる。

すなわち複数の単純衝立てのあるギャラリーに視角360度の監視員を配置する際には、ギャラリーを衝立ての葉を伸ばした補助線によりサブギャラリーに分割し、これらのサブギャラリーの隣接する2個を図6、図7のような監視員を増やさない配置の衝立てを含む2つのサブギャラリーで1組にまとめ、まとめられたギャラリーに対して1人の監視員を配置すればよい。図10、図11、図12は場合1、場合2、場合3に対して、それぞれ複数の単純衝立てが存在するときのまとめ例を示した。

このうちの1つ、図11 (a) の場合について説明する。図7のような単純衝立てが監視員配置可能域の境界に対し垂直で、葉を延長した補助線と監視員配置可能域とに交点がある場合にも、図13のように複数の単純衝立てが存在するときは、葉を伸ばした補助線で分割されたサブギャラリーのうち2個がまとめられ、2個の衝立てのうち一方は図7のように監視員数を増やさない。図13を図11 (a) のようにまとめるならば、guard 1、guard 2 の各々に対して

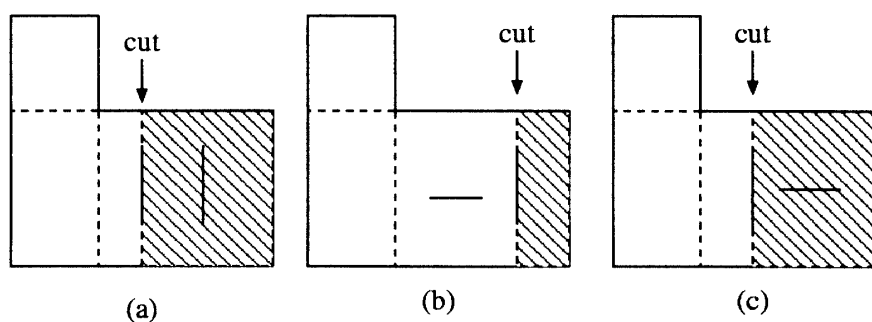


図9 複数の衝立ての配置例

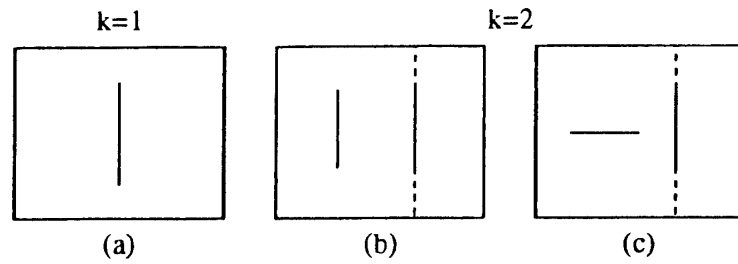


図10 複数の衝立てのまとめ例 (1)

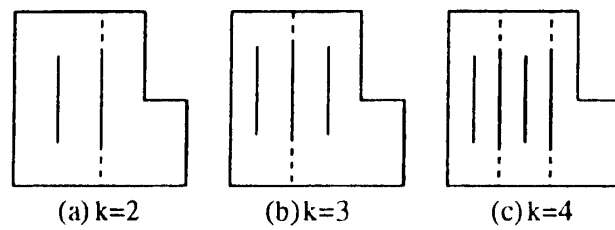


図11 複数の衝立てのまとめ例 (2)

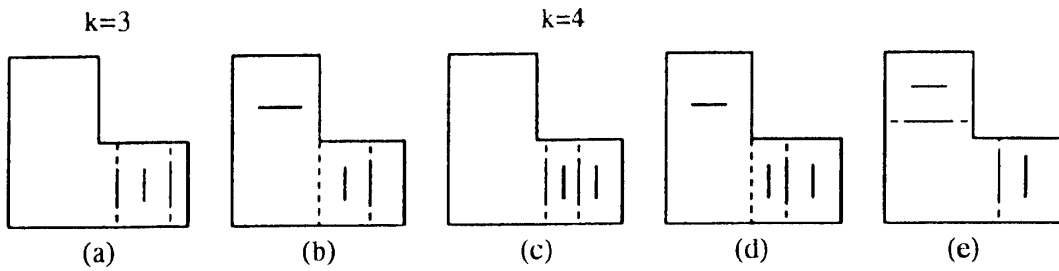


図12 複数の衝立てのまとめ例 (3)

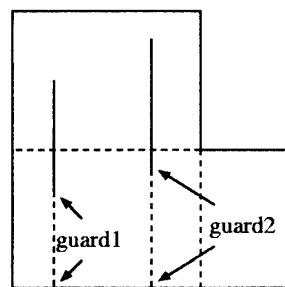


図13 複数の衝立ての配置例

図示されている点のいずれかに監視員を配置すれば監視可能であり、衝立てが無いときに比べて1人だけ監視員を増せばよい。他の場合も同様に考えられる。

以上のように複数の衝立てのあるギャラリーに対し、衝立てが2個1組で図6、図7のような監視員を増やさない衝立てを含んだサブギャラリーを作るよう分割されるので、その各々の



サブギャラリーに対し1人ずつ監視員を配置すればギャラリー全体を監視できる。よって監視するのに十分な監視員数は $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ となる。ここで $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor k/2 \rfloor$ では図8のように、衝立て1本で必ず1人監視員が必要である場合には十分な数にならないことに注意しなければならない。

### 3.2 必要性の検証

次に必要性について検証する。必要な監視員の数は、多角形ギャラリーの形状により2つの場合がある。

第1に、任意の直 $n$ 多角形が与えられ、 $n=4u+2$ の場合を述べる。このとき任意の $k$ 個の単純衝立てについて必要な監視員数は、 $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ となり、必要な監視員数の条件は十分な監視員数の条件と同数となる。

第2には、任意の直 $n$ 多角形が与えられ、 $n=4u$ の場合である。このとき任意の $k$ 個の単純衝立てについて必要な監視員数は、 $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor k/2 \rfloor$ となる。これは、 $n=4u$ の場合には図6のように、衝立てが1個加わったときに必ず、監視員を1人増加させない場合が存在し、このため作られるサブギャラリーのうち1個は必ず監視員の増加に寄与しないため、 $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ が必要となることはない。

これら2つの場合について上限だけの人数が必要な場合を例示する（図14）。以上により必要条件が与えられた。

## 4 衝立ての配置により、より少ない人数で監視できる場合

衝立ての位置によっては、配置する監視員の人数が明らかに $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人未満になる場合がある。そのような場合に監視員を配置する前に衝立ての木の位置関係により、監視員の増加に寄与しない衝立てを再配置または排除することによって、より少ない監視員で全体を監視するための配置手順を示す。

視角90度の監視員で人数を減らせたのは、以下の2つの場合があった [7]。

第一は単純衝立ての葉から枝と同一直線状に補助線を引くとき、その補助線上に別の単純

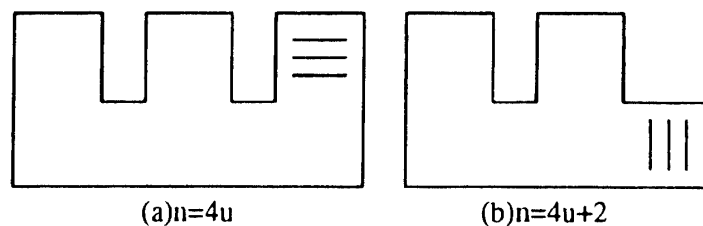


図14 必要な場合の例

衝立てが一直線上に並ぶ場合である。このとき、これらの衝立ては、接続して一つの衝立てとしてみなしてもよいから、一つの衝立てに連結して考えられる内側 2 個のノードは無いものとみなされる。

第二は [6] で示された分割アルゴリズムにより分割されるサブギャラリの壁上に衝立てが配置されている場合である。すなわち、衝立てを考えない場合にギャラリーが長方形に分割され、分割に基づいて監視員を配置するアルゴリズムが [6] によって開発されていた。このときこの分割に利用されたりフレクスから延長された補助線により、分割されるときサブギャラリの壁上に、衝立てが配置されている場合である。

この場合、衝立ての次数 1 の葉を伸張した補助線により分割されてできるサブギャラリの壁は、衝立てがない場合に [6] のアルゴリズムによって分割されたサブギャラリの壁と一致し、衝立てによってそのアルゴリズムで対象とするサブギャラリーを構成する辺数を増加させないことがある。このような位置にある衝立ては取り去って数えないようにすることができた。

以上の場合、視角 90 度の監視員を配置する前に衝立てを再配置または取り去ってから監視員を配置することで、より少ない人数の監視員を配置することができた。すなわち、次数  $m$  で与えられた衝立てがあった場合、上記の位置にある衝立てをあらかじめ再配置または取り去って得られた衝立ての次数  $m'$  により、配置問題を考えればよい。

このとき視角 90 度の監視員を配置した位置に、代わりに視角 360 度の監視員を配置しても上で述べた衝立てを再配置、または取り去る理由には全く影響が無い。よって、視角 360 度であっても視角 90 度の場合と同様、監視員を配置する前に衝立ての位置により、衝立ての木を再配置または除去することによって、より少ない監視員数を配置できる。

## 5 配置アルゴリズム

以上より視角 360 度の監視員を配する場合の配置アルゴリズムは、以下のようになる。

1. 衝立ての位置により、衝立ての木を再配置または除去する。
2. 衝立ての端点（次数 1 のノード）を始点とし壁面に至るまで補助線を引き、ギャラリーを分割する。
3. 図 6、図 7 のような監視員を増やさないサブギャラリーにまとめてゆく。このとき、どの分割されたサブギャラリーをまとめるかによって減らせる監視員数の効率に差が出る可能性がある。
4. 分割された各々のサブギャラリーが、長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム [6] により、さらに分割できる場合は分割する。
5. 分割された各々のサブギャラリーに監視員を配置する

## 6 結 び

衝立て (screen) のある直多角形ギャラリーにおいて、視角が限定されない監視員を配置するときには必要十分となる人数を考察した。

監視員の視角が $90^\circ$ であったときには必要十分な監視員数は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 、 $(m=4p+2q)$ 、 $p$ は次数4のノード数、 $q$ は次数それ以外のノード数であった。監視員の視角が $360^\circ$ である場合には、より少ない監視員数で監視できる。特に衝立てが単純衝立てであるとき、単純衝立ての数を $k$ とすると、視角が $90^\circ$ のときには十分な監視員数は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor + k$ となるが、視角が $360^\circ$ のときには、 $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ で十分となり、より少ない監視員数で監視可能であることが明らかになった。

今後の問題としては次のような問題が考えられる。

- 任意形の直衝立てが存在する直多角形ギャラリーに視角360度の監視員を配置する問題。
- 一般多角形のギャラリーに衝立てが存在するときの監視問題。

など。

## 参 考 文 献

- [1] J. O'Rourke, "An Alternative Proof of the Rectilinear Art Gallery Theorem," Journal of Geometry, Vol. 21, pp.118-130, 1983
- [2] J. O'Rourke, "Art Gallery Theorems and Algorithms," Oxford Univ. Press, 1987
- [3] F. Hoffmann, "On the Rectilinear Art Gallery Problem," LNCS, 443, Springer Verlag, pp.716-728, 1990
- [4] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, J. Urrutia, "Illumination with Orthogonal Floodlights," LNCS, 1004, Springer Verlag, pp.362-371, 1995
- [5] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, J. Urrutia, "Illumination of Orthogonal Polygons with Orthogonal Floodlights," Int. J. Comp. Geom. Appl., Vol. 8, No. 1, pp.25-38, 1998
- [6] 糟谷咲子、後藤宗弘、松本忠博、"視角90度の監視員の直多角形ギャラリーへの配置アルゴリズム"、電子通信情報学会論文誌 [A]、VOL.J81-A NO.8、pp.1175-1180、1998
- [7] 糟谷咲子、松本忠博、後藤宗弘、"視角90度の監視員の監視員による衝立てのある直多角形ギャラリーの監視問題"、電子通信情報学会論文誌 [A]、投稿中